Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Ossicini

Immediata limitazione delle derivate di ordine superiore dei polinomi ultra-sferici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.2, p. 110–112.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_2_110_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Immediata limitazione delle derivate di ordine superiore dei polinomi ultra-sferici.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma).

Sunto. - *Si dimostra una limitazione per le derivate dei polinomi ultra-sferici e se ne deduce la convergenza di un particolare sviluppo in serie.*

a) Ci proponiamo di determinare una maggiorazione valevole in tutto l'intervallo $(-1, 1)$ delle derivate di ordine superiore dei polinomi ultrasferici:

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} a_m^{(\lambda)} x^{n-2m} \tag{1}$$

con

$$(2)\qquad a_m^{(\lambda)} = \frac{(-1)^m 2^{n-2m}\Gamma(\lambda + n - m)}{(n-2m)!\, m!\, \Gamma(\lambda)}, \qquad \lambda > 0$$

che consegue immediatamente dalla (1).

b) Per comodità di dimostrazione poniamo la (2) sotto la forma:

$$(3)\qquad a_m^{(\lambda)} = (-1)^m 2^{n-2m}\binom{\lambda+n-m-1}{n-m}\binom{n-m}{m}\ \text{(1)}.$$

Se teniamo conto delle note relazioni

$$(4)\qquad 2^{\alpha-1} = \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha}{3} + \ldots = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{2} + \binom{\alpha}{4} + \ldots$$

$\alpha > 0$ reale

ricaviamo dalla (3)

$$(5)\qquad |a_m^{(\lambda)}| \leq 2^{n-2m}\, 2^{\lambda+n-m-2}\, 2^{n-m-1} < 2^{\lambda+3n-3}\ \text{(2)}.$$

c) Poichè il numero dei termini di $P_n^{(\lambda)}(x)$ per $n \geq 1$ vale $\left[\frac{n}{2}+1\right] \leq n$ la derivata di ordine s fa acquistare ad ogni termine

(1) In particolare per $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ per i polinomi $P_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$, $P_n^{(1)}(x)$ si usa la notazione $P_n(x)$, $V_n(x)$ e si chiamano polinomi di LEGENDRE e polinomi di TCHEBICHEF di seconda specie.

La (3) ci dà

$$(3')\qquad a_m^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{(-1)^m}{2^n}\binom{2n-2m}{n-m}\binom{n-m}{m} \qquad a_m^{(1)} = (-1)^m 2^{n-2m}\binom{n-m}{m}.$$

(2) Nel caso $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ le (3') ci dànno rispettivamente:

$$(5')\qquad \left| a_m^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right| < 2^{2n-2}, \qquad \left| a_m^{(1)} \right| < 2^{2n-1},$$

e le (6) (7) possono mettersi in forma più precisa mettendo a fattore di n^2 e $n^2(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-s+1)$ per $\lambda = \frac{1}{2}$, 2^{2n-2} e per $\lambda = 1$, 2^{2n-1}.

Per la limitazione delle derivate dei polinomi di LEGENDRE vedi: G. SANSONE: « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Aprile-Giugno 1942, serie II, anno IV, n. 3.

di $P_n^{(\lambda)}(x)$ un fattore numerico intero non superiore a

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-s+1)$$

abbiamo quindi se $|x| \leqq 1$ e $n \geq 1$ le limitazioni che ci eravamo proposti di determinare:

$$(6) \qquad \left| \frac{dP_n^{(\lambda)}(x)}{dx} \right| \leq 2^{\lambda+3n-3} n^2,$$

$$(7) \qquad \left| \frac{d^s P_n^{(\lambda)}(x)}{dx^s} \right| \leq 2^{\lambda+3n-3} n^2(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-s+1). \quad s \geq 2$$

d) Consideriamo lo sviluppo relativo ai polinomi ultrasferici

$$(8) \qquad (1-2x\rho+\rho^2)^{-\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n P_n^{(\lambda)}(x)$$

e deriviamo s volte rispetto a x

$$(9) \qquad \frac{2^s\Gamma(s+\lambda)(1-2x\rho+\rho^2)^{-\lambda-s}}{\Gamma(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \frac{d^s}{dx^s} P_{n+s}^{(\lambda)}(x) \ (^3).$$

Le relazioni (6), (7) ci permettono di dedurre che la serie (9) fissato $\rho \left(|\rho| < \frac{1}{8}\right)$ è uniformemente convergente rispetto ad x variabile in $(-1, 1)$; infatti la serie dei valori assoluti della (9) è maggiorata da

$$(10) \qquad 2^{\lambda+3s-3} \sum_{n=0}^{\infty} (n+s)^2(n+s-1)\dots(n+1)(2^3|\rho|)^n$$

ed avendosi

$$\lim_{n\to\infty} (n+s+1)^2(n+s)\dots(n+2)/(n+s)^2(n+s-1)\dots(n+1) = 1$$

la (9) è convergente per $|\rho| < \frac{1}{8}$.

(3) Nel caso $\lambda = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ la uniforme convergenza della (9) rispetto ad x variabile in $(-1, 1)$ si ha anche per $|\rho| < \frac{1}{4}$.