Fernando Bertolini

Applicazione di un noto criterio generale di compattezza allo spazio lagrangiano delle funzioni continue.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.2, p. 107–110.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_2_107_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Applicazione di un noto criterio generale di compattezza allo spazio lagrangiano delle funzioni continue.

Nota di FERNANDO BERTOLINI (a Roma).

Sunto. - *Si dimostra il teorema di* ASCOLI-ARZELÀ *facendo uso di un noto criterio generale di compatezza.*

È di fondamentale importanza nel calcolo delle variazioni il concetto di *compattezza*, in quanto ogni criterio di compattezza ha attinenza con teoremi di esistenza per problemi di estremo. Adottando una definizione del prof. M. PICONE (1), diremo che un insieme X di punti (di uno spazio topologico S) è *compatto*, quando ogni successione $\{X_k\}_{k=1,2,\ldots}$ di insiemi contenuti in X ammette (almeno) un elemento di compattezza x; ciò significa che, fissato ad arbitrio un intorno I del punto x, per infiniti valori dell'indice k l'insieme X_k e l'intorno I hanno punti comuni.

È noto che, in particolari spazi, la compattezza si riconduce ad un'altra proprietà, notevolmente semplice da un punto di vista intuitivo: la *iperlimitatezza* (2). In uno spazio metrico, un insieme X si dice *iperlimitato* quando, fissato ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, è sempre possibile decomporre X nella somma di un numero *finito* d'insiemi, ognuno di diametro minore di ε; in altre parole, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste in X un insieme *finito* (3) da cui ogni punto di X dista meno di ε.

E precisamente:

I. *In uno spazio metrico completo, ogni insieme iperlimitato è compatto.* - Sia $\{X_k\}_{k=1,2,\ldots}$ una successione di insiemi, contenuti nell'insieme X iperlimitato. Divido X in n_1 parti aventi diametro mi-

(1) M. PICONE, *Due conferenze sui fondamenti del calcolo delle variazioni*, tenute nei giorni 6 ed 8 maggio 1950 al Seminario Matematico dell'Università di Napoli.

(2) Secondo la nomenclatura proposta dal prof. M. PICONE; altri dice *totale limitatezza.*

(3) Composto cioè di un numero finito di punti; parlando di insiemi finiti, intenderò sempre che siano insiemi *ordinati.*

nore di 1: ve n'è una almeno, A_1, avente punti comuni con X_k per infiniti valori di k; e se $\{k_i\}_{i=1,2,..}$ è la successione (crescente) di numeri naturali per cui $A_1 \cdot X_{k_i} \neq 0$, pongo $A_1 \cdot X_{k_i} = X_{1,i}$. Gli insiemi della successione $\{X_{1,k}\}_{k=1,2,...}$ son contenuti nell'insieme A_1, che ha diametro minore di 1 ed è iperlimitato: divido A_1 in n_2 parti aventi diametro minore di 1/2, tra le quali ve n'è una almeno, A_2, avente punti comuni con $X_{1,k}$ per infiniti valori di k; e se $\{k_i\}_{i=1,2,..}$ è la successione (crescente) di numeri naturali per cui $A_2 \cdot X_{1,k_i} \neq 0$, pongo $A_2 \cdot X_{1,k_i} = X_{2,i}$.

Questa costruzione sia iterata; in generale, gli insiemi della successione $\{X_{h,k}\}_{k=1,2,..}$ son tutti contenuti nell'insieme A_h di diametro minore di $1/h$, avendosi $A_h > A_{h+1}$ e $X_{h,k_i} > X_{h+1,i}$, per una certa successione crescente di numeri nàturali $\{k_i\}_{i=1,2,..}$ (4) e per $h = 1, 2, \ldots$. Considero la successione $\{Y_n\}_{n=1,2,...}$, avendo posto $Y_n = \sum_{h=n}^{+\infty} X_{h,h}$; il diametro di Y_n è minore di $1/n$, ed $Y_n > Y_{n+1}$ $(n = 1, 2, ...)$; in forza del criterio di convergenza di Cauchy (lo spazio ambiente è completo) v'è un punto x tale che Y_n è contenuto nell'intorno di x di raggio $1/n$; quindi gli insiemi $X_{h,h}$ son contenuti nell'intorno di x di raggio $1/n$, per $h = n, n+1, ...$; ma v'è una successione $\{X_h'\}_{h=1,2,...}$ subordinata alla $\{X_k\}_{k=1,2,...}$, tale che $X_h' > X_{h,h}$, per $h = 1, 2, \ldots$. Conchiudo che x è un elemento di compattezza per la successione $\{X_k\}_{k=1,2,...}$, e il teorema è dimostrato.

Il teorema I può esser subito invertito, facendo uso del postulato di Zermelo; altrimenti supporremo che l'insieme in questione sia separabile. Possiamo in compenso rinunciare all'ipotesi della completezza dello spazio.

II. *In uno spazio metrico, ogni insieme compatto e separabile è iperlimitato.* – Sia X l'insieme in questione, e la successione di punti $\{x_k\}_{k=1,2,...}$ la sua base.

Se X non è iperlimitato, allora v'è un certo valore positivo ε tale che qualunque insieme finito di punti contenuto in X si lascia qualche punto di X a distanza maggiore di 3ε. Necessariamente v'è qualche punto della base che dista da x_1 per più di ε, e sia x_{k_1} il primo; del pari, v'è qualche punto della base che dista da entrambi x_1 e x_{k_1} per più di ε, e sia x_{k_2} il primo; proseguendo, ottengo una successione di punti di X mutuamente distanti più di ε, e certo priva di elementi di compattezza, contro l'ipotesi.

Queste dimostrazioni riproducono sostanzialmente quelle di Hau-

(4) La successione $\{k_i\}_{i=1,2,...}$ ovviamente dipende da h.

SDORFF, (*Mengenlehre*, p. 108), con le modifiche dovute alla diversa definizione di compattezza.

Poichè negli spazi metrici più notevoli abbiamo sia la completezza dell'ambiente sia la separabilità di ogni insieme chiuso, possiamo dire che in questi spazi la compattezza si identifica con l'iperlimitatezza. Ma spesso è molto più semplice dimostrare la iperlimitatezza di un insieme, che non (direttamente) la sua compattezza: è perciò conveniente, nella esposizione di un corso di calcolo delle variazioni, far uso dei teorr. I e II come di un criterio generale di compattezza.

A titolo d'esempio dimostro il teorema di ASCOLI-ARZELÀ.

III. *Ogni aggregato di funzioni equiuniformemente continue ed equilimitate in un insieme limitato dello spazio euclideo* $S_{(r)}$ *è compatto nello spazio lagrangiano.* - Chiamo X l'aggregato in questione, $x(t)$ la generica funzione appartenente ad X, T il comune insieme di definizione (che posso supporre chiuso), R un intervallo di $S_{(r)}$ *semiaperto a sinistra* [5] e contenente T, L un numero per cui $|x(t)| < L$ in tutto T e per ogni $x(t)$, $\delta(\varepsilon)$ un modulo di continuità comune a tutte le funzioni $x(t)$.

Decompongo l'intervallo R in n^r intervalli parziali semiaperti a sinistra R_i $(i = 1, 2, \dots, n^r)$, e l'intervallo $(-L, +L)$ dell'asse reale in m intervalli parziali coi numeri $a_0 = -L < a_1 < a_2 < \dots < a_m = +L$, con la condizione che l'ampiezza di R_i sia minore di $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ e quella dell'intervallo (a_{h-1}, a_h) minore di $\varepsilon/3$ $(i = 1, \dots, n^r;\ h = 1, \dots, m)$ [6].

Considero la totalità delle funzioni definite su tutto R le quali in ogni R_i sono costanti ed eguali ad uno dei valori $a_0, a_1, \dots, a_m$: in tutto sono in numero di $N = n^{r(m+1)}$, e le chiamo $f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)$ [7]. Ogni funzione $x(t)$ dista, nello spazio lagrangiano, da una di esse per meno di $\varepsilon/3$. Infatti, se $x(t)$ è definita in un punto di R_i, sia m_i l'estremo inferiore, M_i l'estremo superiore di $x(t)$ in $T \cdot R_i$, a_{h_i} il più piccolo tra i numeri a_h maggiori di m_i: certo sarà $-L <$

[5] Per intervallo semiaperto a sinistra dello spazio $S_{(r)}$ si intende un insieme di punti $(t_1, t_2, \dots, t_r)$ definito da limitazioni del tipo $a_i < t_i \leq b_i$ $(i = 1, 2, \dots, r)$.

[6] Posso prender gli intervalli R_i tutti eguali, e così gli intervalli (a_{h-1}, a_h); inoltre i numeri n ed m possono esser i più piccoli che soddisfano le condizioni richieste; gli intervalli R_i possono esser ordinati « alla Cauchy ».

[7] Le funzioni $f_s(t)$ possono esser ordinate in questo modo: tra due precede quella che, nel *primo* intervallo R_i in cui son diverse, ha valore minore dell'altra.

$< m_\iota \leq M_\iota < +L$, $M_\iota - m_\iota < \varepsilon/3$, quindi $|M_\iota - a_{h_\iota}| < \varepsilon/3$, $|m_\iota - a_{h_\iota}| < \varepsilon/3$, e in tutto $T \cdot R_\iota$ $|a_{h_\iota} - x(t)| < \varepsilon/3$; se invece $T \cdot R_\iota$ è vuota, pongo $a_{h_\iota} = a_0$. Per un certo indice s, ben determinato, si ha $f_s(t) = a_{h_\iota}$ per $t \varepsilon R_\iota$, $i = 1, 2, \dots, n^r$, e quindi

$$(1) \qquad |f_s(t) - x(t)| < \varepsilon/3$$

in tutto $T \cdot R$.

Chiamando X_s l'insieme delle funzioni di X verificanti la (1) $[s = 1, 2, \dots, N]$, sarà $X = \sum_{s=1}^{N} X_s$, diam $X_s < \varepsilon$: lo spazio lagrangiano essendo completo, ciò basta per la compattezza dell'aggregato. È ovvia l'estensione al caso delle funzioni vettoriali.

Viceversa:

IV. *Ogni insieme iperlimitato (nello spazio lagrangiano) di funzioni* x(t), *continue nell'insieme chiuso e limitato* T *di* $S_{(r)}$ *è formato di funzioni equicontinue ed equilimitate.* - Esistono, per ogni $\varepsilon > 0$, certe funzioni in numero finito $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ appartenenti all'insieme, tali che ad ogni $x(t)$ ne corrisponde una $x_s(t)$ per cui $|x_s(t) - x(t)| < \varepsilon$ in tutto T. Ma se $\delta(\varepsilon)$ è un modulo di continuità comune a $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, ed L un numero che le maggiori tutte in modulo, avremo, per ogni $x(t)$, $|x(t)| < L + \varepsilon$ in tutto T, mentre dalla relazione $|t' - t''| < \delta(\varepsilon)$ segue, per ogni $x(t)$ e per un certo s,

$$|x(t') - x(t'')| \leq |x_s(t') - x_s(t'')| + |x_s(t') - x(t')| + |x_s(t'') - x(t'')| < 3\varepsilon.$$

Giacchè nello spazio lagrangiano ogni insieme chiuso e compatto è separabile e quindi ogni insieme compatto è iperlimitato, il teorema IV basta ad invertire il teorema di ASCOLI-ARZELÀ.