Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Merli

Su una classe di polinomi interpolanti costruiti con punti foncamentali normalmente distribuiti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.2, p. 103–106.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_2_103_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Su una classe di polinomi interpolanti costruiti con punti fondamentali normalmente distribuiti.

Nota di Luigi Merli (a Firenze).

Sunto. - *Si dimostra un teorema di convergenza uniforme, in tutto l'intervallo* $-1 \leq x \leq 1$, *per una classe di polinomi interpolanti costruiti con punti fondamentali normalmente distribuiti nel senso di* L. Fejér.

1. Siano $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$, n punti distinti dell'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ e siano $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \ldots, f(x_n^{(n)})$, i valori assunti in tali punti da una funzione $f(x)$ definita nello stesso intervallo. Indichiamo con

$$(1) \qquad l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\omega_n(x) = c(x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \ldots (x - x_n^{(n)}), \qquad c \neq 0,$$

il polinomio di grado $\leq n - 1$ che nei punti $\{x_k^{(n)}\}$ assume il valore 1, mentre si annulla in $x_i^{(n)}$, con $i \neq k$.

Il polinomio di interpolazione di LAGRANGE

$$L_n[f] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x), \tag{2}$$

è l'unico polinomio di grado $\leq n-1$ che negli n punti dati assume i valori $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \dots, f(x_n^{(n)})$ rispettivamente, mentre il polinomio di interpolazione di HERMITE

$$H_n[f] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, h_k^{(n)}(x), \tag{3}$$

$$h_k^{(n)}(x) = v_k^{(n)}(x)[l_k^{(n)}(x)]^2, \tag{4}$$

$$v_k(x) = 1 - (x - x_k^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}, \tag{5}$$

è l'unico polinomio di grado $\leq 2n-1$, che, nei punti dati, assume i valori $f(x_1^{(n)}), f(x_2^{(n)}), \dots, f(x_n^{(n)})$ e la cui derivata si annulla nei medesimi punti.

È noto (¹) che non è possibile una scelta di ascisse $\{x_k^{(n)}\}$ per le quali il polinomio $L_n[f]$ converga, per $n \to \infty$, verso $f(x)$ qualunque sia $f(x)$ continua, mentre, per l'approssimazione delle funzioni continue con i polinomi di interpolazione di HERMITE, L. FEJÉR (²) ha dimostrato che se i punti $\{x_k^{(n)}\}$, $(k = 1, 2, \dots, n)$, formano un sistema di punti *normalmente distribuiti*, per i quali risulti cioè verificata la condizione $v_k^{(n)}(x) \geq \rho > 0$, $0 < \rho < 1$, $(k = 1, 2, \dots, n;\ n = 1, 2, \dots)$, $-1 \leq x \leq 1$, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} H_n[f] = f(x), \tag{6}$$

qualunque sia $f(x)$ continua, la convergenza essendo uniforme per $-1 \leq x \leq 1$.

Qualche anno fa G. GRÜNWALD (³) ha preso in considerazione il polinomio

$$G_n[f] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^2(x), \quad (^4), \tag{7}$$

(¹) Cfr. anche per le notazioni, per esempio: L. MERLI, *Recenti risultati sulla convergenza dei polinomi di interpolazione di Lagrange e di Hermite*, « Giorn. Ist. Attuari », XI (1940), pagg. 107-118.

(²) L. FEJÉR, *Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen Konjugierten Punkte*, « Mathematische Annalen », 106 (1932), pagg. 1-55.

(³) G. GRÜNWALD, *On the theory of interpolation*, « Acta Mathematica », 75 (1943), pagg. 219-245.

(⁴) Qualche volta, per brevità, ove non vi sia luogo ad equivoco, scriveremo $l_k(x)$ in luogo di $l_k^{(n)}(x)$.

di grado $\leq 2n-2$, ed ha dimostrato, sempre nell'ipotesi che le $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ formino un sistema di punti *normalmente distribuiti*, che se $f(x)$ è continua in $-1 \leq x \leq 1$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} G_n[f] = f(x), \qquad -1 < x < 1, \tag{8}$$

e la convergenza è uniforme in $-1+\lambda \leq x \leq 1-\lambda$, $\lambda > 0$.

Un particolare sistema di punti normalmente distribuiti è dato dagli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie

$$T_n(x) = \cos n\,(\arccos x), \qquad -1 \leq x \leq 1,$$

e, per tali ascisse, nell'intento di dare un teorema di convergenza uniforme in tutto l'intervallo $-1 \leq x \leq 1$, abbiamo provato recentemente che è

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1-x_k^2}\, f(x_k^{(n)}) l_k^2(x) = \sqrt{1-x^2}\, f(x),$$

qualunque sia $f(x)$ continua, per $-1 \leq x \leq 1$ (5).

Più in generale vogliamo provare in questa nota che *se i punti* $\{x_h^{(n)}\}$ *sono normalmente distribuiti, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1-x_k^2) f(x_k^{(n)}) l_k^2(x) = (1-x^2) f(x), \tag{9}$$

e ciò uniformemente per $-1 \leq \mathrm{x} \leq 1$, *qualunque sia* f(x) *continua*, realizzando così un teorema di convergenza per una classe molto generale di ascisse $\{x_k^{(n)}\}$ (6), con polinomi di grado $\leq 2n-2$, mentre con i polinomi di Hermite la convergenza è realizzata con polinomi di grado $\leq 2n-1$.

2. Ci occorre, in primo luogo, provare che è

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left| (1-x_k^2) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} (x-x_k) l_k^2(x) \right| = 0, \quad -1 \leq x \leq 1. \tag{10}$$

Tenuto conto che i punti sono normalmente distribuiti, cioè che

$$1-(x-x_k^{(n)}) \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \geq \rho > 0. \quad 0 < \rho < 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

(5) L. Merli, *Sulla approssimazione delle funzioni continue mediante polinomi*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », VIII, vol. 1, fasc. II, (1946), pagg. 1175-1180.

(6) Basti ricordare che sono normalmente distribuiti, per esempio, gli zeri dei polinomi di Iacobi, In (α, β, x) i cui parametri verifichino la condizione $-1 \leq \alpha < 0$, $-1 \leq \beta < 0$. Cfr. L. Fejer, loc. cit. in (2).

sarà

$$1-(1-x_k^{(n)})\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}\geq\rho, \qquad 1+(1+x_k)\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}\geq\rho,$$

da cui segue subito

$$\left|\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}\right|\leq\max\left(\frac{|\rho-1|}{1+x_k};\ \frac{1-\rho}{1-x_k}\right),$$

e quindi

$$(1-x_k^2)\left|\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}\right|\leq 2.$$

È allora, tenuto conto di quest' ultima disuguaglianza,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x-x_k)l_k^2(x)\right|\leq 2\sum_{k=1}^{n}|x-x_k|\,l_k^2(x).$$

Ma è noto [7] che se i punti sono normalmente distribuiti si ha $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|x-x_k|\,l_k^2(x)=0$, per $-1\leq x\leq 1$, e la (10) è così provata.

3. Sia ora $f(x)$ una qualunque funzione continua in $-1\leq x\leq 1$. In virtù della (6) sarà

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)f(x_k^{(n)})h_k(x)=(1-x^2)f(x), \qquad -1\leq x\leq 1,$$

per cui, tenuto conto delle (4) e (5), sarà anche

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)f(x_k^{(n)})l_k^2(x)=(1-x^2)f(x)+$$
$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)f(x_k^{(n)})\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x-x_k)l_k^2(x).$$

Essendo $f(x)$ continua in $-1\leq x\leq 1$, è ivi $|f(x)|\leq M$, per cui

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)f(x_k^{(n)})\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x-x_k)l_k^2(x)\right|\leq$$
$$\leq M\sum_{k=1}^{n}\left|(1-x_k^2)\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x-x_k)l_k^2(x)\right|;$$

ma quest' ultima somma, in virtù della (10), ha per limite lo zero e ne segue la (9).

[7] G. Grünwald, loc. cit. in [3], pag. 230.