Carlo Felice Manara

Sulla esistenza di curve algebriche piane irriducibili aventi dati caratteri plückeriani.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 9–14.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_9_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sulla esistenza di curve algebriche piane irriducibili aventi dati caratteri plückeriani.

Nota di Carlo Felice Manara (a Milano).

Sunto. - *Mediante una costruzione effettiva si dimostra erronea l'opinione che non esistono curve algebriche piane irriducibili di ordine 8 e genere 5 aventi più di 13 cuspidi.*

1. È noto che a dati caratteri plückeriani aritmeticamente ammissibili non sempre corrispondono curve algebriche piane effettivamente esistenti (1); nè appare facile dare criteri di esistenza valevoli in generale. I risultati di ricerche in questo senso sono stati messi in discussione da O. Zariski che ha dimostrato la non esistenza di curve di ordine 8 dotate di 16 cuspidi (2). Successivamente R. Apéry ha affermato la non esistenza di curve di ordine 8 di genere 5 aventi più di 13 cuspidi (3); ma i suoi ragionamenti non sono del tutto convincenti. Esaminando poi qualche esempio, si trovano dei casi che non si accordano con le sue conclusioni; infatti si può costruire una curva piana irriducibile di ordine 8 di genere 5 dotata di 14 cuspidi (e due nodi).

Scopo della presente nota è appunto la dimostrazione della effettiva esistenza di una tale curva e ciò non per semplice critica negativa ma perchè la discussione di casi particolari (come raccolta di materiale d'esempio) può servire a meglio affrontare e risolvere la questione in generale.

Ci sembra inoltre che il metodo qui seguito sia interessante, perchè costituisce un esempio, per molti aspetti caratteristico, di applicazione dei risultati e dei procedimenti della teoria delle funzioni algebriche polidrome di due variabili (piani multipli) a questioni di esistenza di questo tipo.

2. Consideriamo una superficie algebrica F_4 di ordine 4 avente una retta doppia nodale r e del resto generica. Fissando un punto

(1) Cfr. Enriques e Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni.* Vol. I, Libro II, § 21.

(2) O. Zariski, *On the non existence of curves of order 8 with 16 cusps,* « Amer. Jour. of Math. ». Vol. 53.

(3) R. Apéry, *Sur la non existence de courbes planes de VIII^{me} dégré de genre 5 admettant* r $\geq$ 14 *rebroussements.* « C.-R. Acad. Sci. de Paris », 214, (1942).

generico O di F_4 e proiettando F_4 stessa da O su un piano π si ottiene, come è noto, un piano triplo la cui curva di diramazione φ_8 è irriducibile, ha ordine 8 e possiede, come sole singolarità, 12 cuspidi.

Essa si ottiene proiettando su π da O la curva φ_{10}^* che (insieme con la retta r contata due volte) costituisce la intersezione di F_4 con la polare di O rispetto alla F_4 stessa ed ha in O un nodo. È pure noto che ogni cuspide di φ_8 è traccia, su π, di una retta per O che ha con F_4 un contatto tripunto in un punto semplice K di F stessa distinto da O; pertanto K appare come intersezione (fuori di O) della F_4, della polare prima e della polare seconda di O rispetto ad F_4.

Consideriamo ora una superficie del IV ordine Φ_4 che sia un caso particolare della F_4 sopra considerata, e precisamente possegga, oltre alla retta doppia r, due punti doppi conici e due biplanari fuori di r. La equazione di una tale Φ_4 irriducibile si scrive facilmente in base alle seguenti considerazioni:

fissato nello spazio un sistema cartesiano x, y, z sia C_4 una quartica irriducibile del piano $z=0$ dotata di una cuspide e due nodi ed in posizione generica rispetto alla retta impropria. Siano $u=0$ e $v=0$ le sue bitangenti e sia $b_2=0$ una conica passante per i loro punti di contatto con C_4 e del resto generica, in particolare non passante per il punto comune ad u e v. È noto allora che la equazione di C_4 può essere scritta nella forma

$$C_4 \equiv \{ uvc_2 - b_2^2 = 0 \}$$

(dove $c_2=0$ è una conica opportuna quadritangente alla C_4). Si deduce di qui che la C_4 può essere considerata come curva di diramazione del piano doppio

$$uvz^2 + 2b_2z + c_2 = 0. \tag{1}$$

Ora si riconosce che le sezioni della superficie Φ_4 rappresentata dalla (1) con i piani generici della stella avente centro nel punto Z_∞ (improprio dell' asse z) hanno ivi un nodo, e che esiste un unico fascio di piani per Z_∞ (e precisamente i piani di equazione $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0$) tale che il piano generico di esso interseca Φ_4 secondo una curva la quale, per l'ipotesi fatta sulla conica $b_2=0$, ha in Z_∞ una cuspide (e non una singolarità superiore). Tanto basta per poter concludere che la superficie Φ_4 ha in Z_∞ un punto doppio biplanare isolato.

Inoltre la superficie Φ_4 possiede la retta impropria del piano $z=0$ come retta doppia; la quale ha carattere nodale perchè in caso contrario apparterrebbe alla curva di diramazione del piano doppio (1), e sulla quale non vi sono punti ipermultipli, perchè la superficie polare prima di Z_∞ rispetto alla Φ_4 la incontra in quattro punti distinti, che risultano essere i punti impropri della C_4, e sono punti cuspidali per la retta doppia.

Infine le altre singolarità di Φ_3 si proiettano in singolarità di C_4 e risultano essere un punto doppio conico (che si proietta nel nodo di C_4) e due biplanari (che si proiettano nelle due cuspidi di C_4).

Abbiamo costruito così una superfice Φ_4 del IV ordine avente una retta doppia nodale r e due punti doppi conici e due biplanari fuori di r. Essa è irriducibile in generale, ma non ci importa dimostrarlo qui, perchè la sua irriducibilità apparirà chiara nel seguito come conseguenza di quella di una seconda superficie del IV ordine, che è caso particolare di questa.

Consideriamo ora un punto generico O della superficie Φ_4 rappresentata dalla (1); la curva di diramazione del piano triplo che si ottiene proiettando Φ_4 da O su un piano generico è ancora una φ_8 di ordine 8 che ha due cuspidi e due nodi in più della curva che si ottiene in relazione alla F_4 generica.

Sia infatti N un punto doppio conico di Φ_4; esso si proietta in un nodo N' della curva di diramazione suddetta; ma N' non assorbe nessuna delle cuspidi di φ_8 traccie delle rette per O aventi un contatto tripunto con Φ_4 fuori di O, giacchè la retta ON, per la genericità di O, ha solo due intersezioni riunite in N con Φ_4. Considerazioni analoghe si possono ripetere per ogni punto biplanare.

Dimostreremo ora che la curva di diramazione del piano triplo che si ottiene proiettando una superficie del IV ordine avente una retta doppia r e due punti doppi conici e due biplanari (fuori di r) da un suo punto generico O è irriducibile in generale.

A tal fine basterà riconoscere la cosa in un caso particolare, dimostrando, come faremo, che è irriducibile in un tale caso la curva spaziale φ_{10}^* di ordine 10 che (insieme con la retta r contata due volte) costituisce la intersezione della superficie suddetta e della polare del punto O rispetto ad essa.

3. Sia γ una cubica cuspidata irriducibile del piano $z=0$ e sia A la sua cuspide; si consideri il sistema lineare Σ di tutte le quartiche (dello stesso piano) aventi un punto doppio in A e soggette alle ulteriori condizioni di toccare γ in un punto fissato B (fuori di A) ed oscularla in due altri punti C e D fissati (pure fuori di A). È chiaro che γ è curva base per il sistema Σ il quale pertanto risulta avere dimensione 3 perchè, detta ψ una quartica soddisfacente alle condizioni suddette e non spezzata nella cubica γ ed in una retta, tutte le curve del sistema si possono manifestamente rappresentare nella forma

$$\psi - (\lambda x + \mu y + \nu)\gamma = 0.$$

Quindi il sistema Σ appare costituito da tutte le curve che si ottengono proiettando dal punto Z_∞ le sezioni del monoide

$$z = \psi / \gamma \tag{2}$$

eseguite con i piani dello spazio di equazioni

$$z = \lambda x + \mu y + \nu.$$

È facile verificare che il monoide (2) è irriducibile, possiede una retta doppia r che passa per Z_∞ e si proietta in A, un punto doppio conico che si proietta in B e due biplanari che si proiettano in C e D.

Quindi il monoide rappresentato dalla equazione (2) appare come un caso particolare della superficie Φ_4 del IV ordine che abbiamo considerato. Tuttavia eseguiremo i calcoli che ci interessano assumendo, come è lecito, un caso particolare di monoide e precisamente quello che si ottiene rendendo infinitamente vicini, sulla γ, i punti B, C e D e quindi imponendo alle curve del sistema Σ di avere un contatto 8–punto con la γ in un suo punto B^* fissato.

4. Consideriamo dunque il monoide M di equazione

$$M \equiv \{ z = x^2 y^2 / (y + x^3) \}. \tag{3}$$

Esso ha come retta doppia r la retta impropria del piano $x = 0$ e le sue sezioni con i piani dello spazio

$$z = \lambda x + \mu y + \nu$$

si proiettano da Z_∞ nelle curve del sistema

$$x^2 y^2 - (\lambda y + \mu y + \nu)(y + x^3) = 0$$

tutte aventi un punto doppio nel punto Y_∞ (improprio dell'asse delle y) ed un contatto 8–punto con la cubica γ di equazione

$$\gamma \equiv \{ y + x^3 = 0 \}$$

nell'origine delle coordinate.

Il monoide M rappresentato dalla (3) è dunque chiaramente un caso particolare del monoide rappresentato dalla (2) del precedente paragrafo.

Fissiamo ora su M il punto semplice Q di coordinate $x = 1$,

$y = 1$, $z = 1/2$ e consideriamo la superficie M', polare di O rispetto ad M, di equazione

$$M' \equiv \{ 2(3x^2 z - 2xy^2) + 2(z - 2x^2 y) + y + x^3 + 4yz = 0 \}$$

la quale, come si verifica immediatamente, non ha in comune con il monoide M nessuna retta passante per Z_∞, all'infuori della retta impropria del piano $x = 0$ che è doppia per M e semplice per M'.

La intersezione di M con M' consta quindi (della retta r suddetta contata due volte e) di una curva φ_{10}^* di ordine 10 della quale non fa parte nessuna retta per Z_∞ e che ha un punto quadruplo in Z_∞ ed un punto doppio in O.

La sua proiezione da Z_∞ sul piano $z = 0$ è la sestica f di equazione

$$f \equiv \{ 2x^2 y^2 (3x^2 + 2y + 1) + (y + x^3)(y + x^3 - 4x^2 y - 4xy^2) = 0 \}.$$

Quindi, per quanto precede, provata la irriducibilità di f sarà provata anche quella di φ_{10}^*.

Si noti ora che f possiede un punto triplo in Y_∞, un punto doppio in O', di coordinate $x = 1$ ed $y = 1$, proiezione di O da Z_∞, ed infine quattro punti doppi nell'origine degli assi, infinitamente vicini sul ramo lineare $y = -x^3$. Quindi le cubiche aggiunte del fascio

$$x^3 + y(1 - 2x) + txy(x - 1) = 0 \tag{4}$$

(dove t è un parametro variabile) secano su f delle coppie di punti variabili, costituenti una g_2^1 (che è la serie canonica di f). Le ascisse dei punti appartenenti alla g_2^1 suddetta sono date dalla equazione

$$(t^3 + 4t^2 + 2t)x^2 - (t^3 + 6t^2 + 14t + 8)x + t^2 + 4t + 6 = 0. \tag{5}$$

Proveremo per assurdo che la f è irriducibile; infatti in caso contrario deve verificarsi almeno una delle due ipotesi seguenti:

a) esiste una parte di f su cui non cade nessun punto della g_2^1 suddetta;

b) i punti appartenenti a coppie della g_2^1 descrivono due parti distinte di f (4).

Nell'ipotesi *a*) devono esistere dei valori di t in corrispondenza ai quali la curva del fascio (4) e la f hanno una parte comune. Ma si verifica anzitutto direttamente che questo non avviene per

(4) Chiediamo venia al Lettore del fatto che la trattazione è condotta su un tono generale di analisi minuta, che può risultare tediosa; ma ciò è richiesto necessariamente dall'argomento alquanto malfido.

$t = \infty$; se poi avvenisse per un valore finito di t questo renderebbe identicamente soddisfatta la (5) e ciò si esclude osservando che non esistono radici comuni ai tre coefficienti delle potenze di x nella (5).

Nell'ipotesi b) la g_2^1, e quindi la funzione algebrica $x(t)$ definita dalla (5), non avrebbe diramazioni. E ciò si esclude osservando che il discriminante della (5) è dato dal polinomio

$$\Delta = t^6 + 8t^5 + 32t^4 + 88t^3 + 164t^2 + 176t + 64$$

il quale, variando t da -1 a zero, cambia di segno; il che basta per concludere che nel suddetto intervallo esiste un numero dispari di radici reali e quindi il gruppo di monodromia della g_2^1 è transitivo.

A questo punto possiamo riassumere i risultati della nostra analisi enunciando le seguenti proposizioni:

I. - Esistono superfici Φ_4 del IV ordine irriducibili, aventi una retta doppia nodale r e due punti doppi conici e due biplanari isolati fuori di r.

II. - La curva di contatto delle tangenti mandate ad una siffatta Φ_4 da un suo punto generico O è una curva φ_{10}^* di ordine 10 irriducibile, avente un punto doppio in O.

III. - La proiezione su un piano generico dal punto O della suddetta φ_{10}^* è una curva φ_8 irriducibile di ordine 8 dotata di 14 cuspidi e due nodi.

Quindi in particolare:

IV. - Esistono curve algebriche piane irriducibili di ordine 8 di genere 5 aventi 14 cuspidi.