Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Cattaneo

Sui numeri quasiperfetti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 59–62.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_59_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sui numeri quasiperfetti.

Nota di Paolo Cattaneo (a Padova).

Sunto. - *Chiamiamo* quasiperfetto *un numero, naturale, che sia eguale alla somma di tutti i suoi divisori propriamente detti (ossia con l'esclusione del numero stesso e dell'unità). Si studiano tali numeri, dimostrando, fra l'altro, che essi, se esistono, sono quadrati perfetti con almeno sette divisori primi distinti, tutti maggiori di* 3.

1. Ogni numero intero positivo può porsi sotto la forma

$$N = 2^h p^a q^b r^c \ldots, \qquad \text{con} \qquad p,\ q,\ r, \ldots$$

numeri primi dispari distinti, con h intero positivo o nullo e con a, b, c, ... interi positivi.

Il *numero* N dicesi *perfetto* se è uguale alla somma dei suoi divisori minori di N. Tutti i numeri perfetti pari furono trovati da Euclide; non si conoscono numeri perfetti dispari e si sospetta che non ne esistano; certo è che, se ne esistono, sono grandissimi, di almeno 45 cifre e con 26 divisori primi disuguali, come dimostrò CATALAN nel 1888 (1).

Indicando con S la somma di tutti i divisori di N e chiamando *eccedenza* di N la differenza $E = S - 2N$, N è dunque perfetto se $E = 0$. Secondo che E è positiva o negativa, N dicesi *abbondante* o *deficente.*

Nella presente Nota ci proponiamo lo studio dei numeri abbondanti di eccedenza 1, che sono eguali alla somma di tutti i loro *divisori propriamente detti*, ossia con l'esclusione non soltanto di N ma anche dell'unità. Chiameremo tali *numeri quasiperfetti*; e li indicheremo con QP.

2. Ponendo

$$P = 1 + p + p^2 + \dots + p^a = (p^{a+1} - 1) : (p - 1),$$
$$Q = 1 + q + q^2 + \dots + q^b = (q^{b+1} - 1) : (q - 1),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

si ha:

$$S = (1 + 2 + 4 + \dots + 2^h) \cdot P \cdot Q \cdot R \cdot \dots =$$
$$= (2^{h+1} - 1) \cdot P \cdot Q \cdot R \cdot \dots ;$$

donde si vede che, se N è QP, S è dispari, assieme a P, Q, R,... ed a, b, c,... sono pari: $2 \cdot l$, $2 \cdot m$, $2 \cdot n$,... .

Si ha quindi:

$$N = 2^h \cdot p^{2l} \cdot q^{2m} \cdot r^{2n} \dots ,$$
$$S = (2^{h+1} - 1) \cdot P \cdot Q \cdot R \dots = 2N + 1 = 2^{h+1} \cdot p^{2l} \cdot q^{2m} \cdot r^{2n} \dots + 1,$$
$$(2^{h+1} - 1) \cdot (P \cdot Q \cdot R \dots - p^{2l} \cdot q^{2m} \cdot r^{2n} \dots) - 1 = (p^l \cdot q^m \cdot r^h \dots)^2.$$

Da questa ultima uguaglianza risulta che il numero -1 è residuo quadratico di ogni divisore di $2^{h+1} - 1$. Ma è noto (2) che -1 è residuo dei numeri primi della forma $4t + 1$ e non lo è di quelli della forma $4t + 3$; $2^{h+1} - 1$ ha dunque esso pure solo divisori di tale forma; si ha necessariamente $h = 0$.

Concludendo si vede che *non esistono numeri quasi perfetti pari.*

3. È facile provare che non esistono nemmeno numeri QP divisibili per 3.

Infatti, se fosse $N = 3^{2a} \cdot \nu^2$ ed $S = \dfrac{3^{2a+1} - 1}{2} \cdot S' = 2N + 1$,

(1) P. CATTANEO, *Numeri abbondanti e deficenti*, (« Bollettino di Matematica », marzo 1936, Firenze).

(2) P. GAZZANIGA: *Teoria dei numeri* (ed. Drucker, Padova, 1903), pag. 97.

si avrebbe $(3^{2a+1}-1)\cdot S'=4\cdot 3^{2a}\cdot \nu^2+2$,

$$(3^{2a+1}-1)\cdot S'-2=(2\cdot 3^{a}\cdot \nu)^2;$$

-2 sarebbe residuo quadratico di ogni divisore primo di $3^{2a+1}-1$; tale numero avrebbe (2) solo divisori primi della forma $8t+1$ oppure $8t+3$; si avrebbe $3^{2a+1}-1=8\cdot H+1$, oppure $=8\cdot H+3$, $3^{2a+1}=8H+2$, oppure $=8H+4$, donde l'assurdo.

È già noto (1) che le potenze d'un numero primo dispari ed il prodotto di due tali potenze sono deficenti, quindi non numeri QP. Ma non possono esserlo nemmeno i prodotti di 3 o 4 o 5 o 6 potenze di numeri primi dispari, i quali, per quanto precede, possono supporsi maggiori di 3.

Considerando infatti il numero $N=p^a q^b r^c$, con p, q ed r maggiori di 3, si ha:

$$S=\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{c+1}-1}{r-1}<\frac{p^{a+1}}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}}{q-1}\cdot\frac{r^{c+1}}{r-1}=$$
$$=\frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1}\cdot\frac{r}{r-1}\cdot N;$$

e siamo sicuri che N non può essere QP perchè, essendo

$$p\geq 5,\ q\geq 7,\ r\geq 11,\qquad \text{si ha:}$$

$$\frac{p}{p-1}=1+\frac{1}{p-1}\leq 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\qquad \frac{q}{q-1}\leq\frac{7}{6},\qquad \frac{r}{r-1}\leq\frac{11}{10},$$

quindi

$$S\leq\frac{5\cdot 7\cdot 11}{4\cdot 6\cdot 10}\cdot N=\frac{77}{48}\cdot N<2N,\qquad N \text{ deficente.}$$

Analogamente sono deficenti, quindi non QP, i prodotti di 4 o 5 o 6 potenze di numeri primi, maggiori di 3, perchè:

$$(5\cdot 7\cdot 11\cdot 13):(4\cdot 6\cdot 10\cdot 12)=1001:576<2,$$
$$(5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17):(4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16)=17017:9216<2,$$
$$(5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19):(4\cdot 6\cdot 10\cdot 12\cdot 16\cdot 18)=323323:165888<2.$$

4. *Gli eventuali numeri quasiperfetti sono* dunque *dei quadrati perfetti con almeno sette divisori primi distinti, tutti maggiori di* 3.

Sono quindi assai grandi; e sorge spontaneo un dubbio analogo a quello che c'è per i numeri perfetti dispari.

Esistono numeri quasiperfetti?

Mi auguro che si riesca a trovarne, oppure si dimostri che non ce ne sono. Per tale ricerca possono essere utili le proposizioni seguenti.

5. TEOREMA. – « Ogni multiplo d'un numero abbondante o perfetto è abbondante e non quasiperfetto ».

COROLLARIO. – « I divisori d'un numero deficente o perfetto sono tutti deficenti ».

Per dimostrare il Teorema basta provare che, se N è perfetto od abbondante, sono abbondanti e non QP tutti i prodotti $N' = p \cdot N$ ed $N'' = f \cdot N$, dove p è un divisore primo di N ed f è un numero primo che non lo divide.

Nel primo caso si ha

$$S' = \frac{p^{a+2}-1}{p^{a+1}-1} \cdot S = \left(p + \frac{p-1}{p^{a+1}-1}\right) \cdot S\,;$$

quindi, essendo $S \geq 2N$,

$$S' \geq p \cdot 2N + \frac{p-1}{p^{a+1}-1} \cdot 2N \geq 2N' + \frac{p-1}{p^{a+1}-1} \cdot 2p^a =$$

$$= 2N' + 1 + \frac{p^a(p-2)+1}{p^{a+1}-1} > 2\,N' + 1.$$

Nel secondo caso si ha

$$S'' = (1+f) \cdot S \geq (1+f) \cdot 2N = 2N + 2N'' > 2N + 1.$$

Il Teorema resta così completamente dimostrato.

6. Per ogni numero QP si ha (n. 2)

$$PQR \ldots = 2 \cdot (p^l q^m r^n \ldots)^2 + 1, \qquad 2PQR \ldots - 2 = (2 \cdot p^l q^m r^n \ldots)^2;$$

2 è residuo quadratico del numero dispari

$$P = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{2l} \qquad \text{(e di } Q,\ R, \ldots)$$

Ma è noto [2] che -2 è residuo solo dei numeri primi della forma $8t + 1$ ed $8t + 3$; essendo P prodotto di fattori di tali forme, deve avere esso pure una di tali forme, deve essere

$$P \equiv 1 \qquad \text{oppure} \qquad \equiv 3 \qquad \text{(mod. 8)}.$$

Se $p \equiv 1$, si ha $P \equiv 2l + 1$; quindi deve essere $l \equiv 0$ oppure $\equiv 1$ (mod. 4).

Se $p \equiv 3$, si ha $P \equiv 4 \cdot l + 1$; quindi l deve essere pari.

Se $p \equiv 5$, si ha $P \equiv 6 \cdot l + 1$; quindi deve essere $l \equiv 0$ oppure $\equiv 3$ (mod. 4).

Se $p \equiv 7$, si ha $P \equiv 8\,l + 1$; quindi nessuna limitazione.

[illegible]o insomma esclusi i fattori primi $8t + 1$ con l della forma $4\tau + 2$ o $4\tau + 3$, i fattori $8t + 3$ con l dispari, i fattori $8t + 5$ con $l = 4\tau + 1$ o $4\tau + 2$.