Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Ulteriore generalizzazione del determinante di Cauchy-Vandermonde

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 56–59.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_56_0>

Ulteriore generalizzazione del determinante di Cauchy-Vandermonde.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si calcola con facile e breve procedimento un determinante già considerato da vari autori, e che generalizza quello di* CAUCHY-VANDERMONDE.

1. In questa breve nota mi propongo di calcolare il determinante D avente l_1 colonne formate con gli elementi

$$1, X_1, X_1^2, \dots, X_1^{m-1}$$

per la prima, e dalle successive derivate

$$\begin{array}{l} 0,\ 1,\ 2X_1, \dots, (m-1)X_1^{m-2} \\ 0,\ 0,\ 2, \dots, (m-1)(m-2)X_1^{m-3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

per le altre; l_2 colonne formate con gli elementi

$$1, X_2, X_2^2, \dots, X_2^{m-1}$$

per la prima, e dalle successive derivate per le altre; ...; l_n colonne formate con gli elementi

$$1, X_n, X_n^2, \dots, X_n^{m-1}$$

per la prima, e dalle successive derivate per le altre.

Naturalmente deve essere

$$l_1 + l_2 + \dots + l_n = m.$$

Per $l_1 = l_2 = ... = l_n = 1$ si ha il determinante $\Delta(X_1, X_2, ..., X_n)$ di CAUCHY-VANDERMONDE, e pertanto D rappresenta una sua generalizzazione.

Per $l_1 = l_2 = ... = l_n = 2$ si ha un determinante considerato da D. BESSO [1], e il suo valore è dato da

$$\Delta^4(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Per $l_1 = l_2 = ... = l_n = \nu$ il determinante è stato calcolato a meno di una costante da G. ANDREOLI [2], con l'espressione

$$c\Delta^{\nu^2}(X_1, X_2, ..., X_n).$$

In generale il calcolo di D è stato eseguito prima da G. ERIKSONN [3], che non ebbe però occasione di incontrarsi con i lavori di BESSO e ANDREOLI, e poi da F. MARTUCCI [4], che, non avendo conoscenza del lavoro dell'ERIKSONN, ha pensato di estendere i risultati dei due primi autori.

Qui ritorno al determinante D per dare un più rapido procedimento di calcolo.

2. Si consideri il determinante di CAUCHY-VANDERMONDE relativo agli elementi $x_1, x_2, ..., x_m$. È noto che

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... 1 \\ x_1 & x_2 & ... x_m \\ x_1^2 & x_2^2 & ... x_m^2 \\ . & . & . \\ x_1^{m-1} & x_2^{m-1} & ... x_m^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) & ... (x_m - x_1) \\ (x_3 - x_2) & ... (x_m - x_2) \\ & . . . . \\ & (x_m - x_{m-1}). \end{aligned}$$

(1) D. BESSO, *Di alcune proprietà dell'equazione differenziale lineare omogenea del 2º ordine e di alcune equazioni algebriche*, « Rend. R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XIV, 1882-83.

(2) G. ANDREOLI, *Nuova generalizzazione di un teorema sui determinanti di Cauchy*, « Giornale di Matematiche », vol. 51, 1913.

(3) G. ERIKSONN, *Sur une extension du déterminant de Vandermonde*, « Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik », Band 16, n. 13, 1922.

(4) F. MARTUCCI, *Ulteriore generalizzazione di un teorema sui determinanti di Cauchy-Vandermonde*, « Annali del R. Istituto Superiore Navale », vol. III, 1934.

Portiamo il fattore $x_2 - x_1$ del secondo membro a divisore del primo e procediamo al limite per $x_2 \to x_1$. Si presenta una espressione indeterminata e col teorema di L'HOSPITAL si trova che il determinante D_1 in cui gli elementi della seconda colonna vengono sostituiti dalle derivate prime di quelli della prima colonna, è uguale a

$$\begin{array}{r} (x_3 - x_1)^2 \ldots\ldots (x_m - x_1)^2 \\ (x_4 - x_3) \ldots (x_m - x_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_m - x_{m-1}). \end{array}$$

Si passa ora il fattore $(x_3 - x_1)^2$ del secondo membro a divisore del primo e si proceda per $x_3 \to x_1$. Si ottiene come valore di D_1

$$\begin{array}{r} 2!\ (x_4 - x_1)^3 \ldots (x_m - x_1)^3 \\ (x_5 - x_4) \ldots (x_m - x_4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_m - x_{m-1}). \end{array}$$

Dividendo ancora per $(x_4 - x_1)^3$ e facendo $x_4 \to x_1, \ldots$, dividendo per $(x_{l_1} - x_1)^{l_1 - 1}$ e facendo $x_{l_1} \to x_1$, si trova che il determinante D_1 in cui le prime l_1 colonne sono come in D, ha il valore

$$\begin{array}{r} 2!\ 3! \ldots (l_1 - 1)!\ (x_{l_1+1} - x_1)^{l_1} \ldots (x_m - x_1)^{l_1} \\ (x_{l_1+2} - x_{l_1+1}) \ldots (x_m - x_{l_1+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_m - x_{m-1}). \end{array}$$

Analogamente, facendo in modo che le successive l_2 colonne di D_1 (dopo le prime l_1) siano come in D, il determinante assume il valore

$$\begin{array}{r} 2!\ 3! \ldots (l_1 - 1)!\ (x_{l_1+1} - x_1)^{l_1} \ldots\ldots (x_m - x_1)^{l_1} \\ 2!\ 3! \ldots (l_2 - 1)!\ (x_{l_1+l_2+1} - x_{l_1+1})^{l_2} \ldots (x_m - x_{l_1+1})^{l_2} \\ (x_{l_1+l_2+2} - x_{l_1+l_2+1}) \ldots (x_m - x_{l_1+l_2+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_m - x_{m-1}). \end{array}$$

Così procedendo, e facendo infine in modo che le ultime l_n colonne di D_1 siano come in D, il determinante assume il valore

$$\begin{array}{l} 2!\ 3! \ldots (l_1 - 1)!\ (x_{l_1+1} - x_1)^{l_1} \ldots (x_m - x_1)^{l_1} \\ 2!\ 3! \ldots (l_2 - 1)!\ (x_{l_1+l_2+1} - x_{l_1+1})^{l_2} \ldots (x_m - x_{l_1+1})^{l_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2!\ 3! \ldots (l_{n-1} - 1)!\ (x_{l_1+\ldots+l_{n-1}+1} - x_{l_1+\ldots+l_{n-2}+1})^{l_{n-1}} \ldots (x_m - x_{l_1+\ldots+l_{n-2}+1})^{l_{n-1}} \\ 2!\ 3! \ldots (l_n - 1)!. \end{array}$$

Poniamo ora

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{l_1} = X_1$$
$$x_{l_1+1} = x_{l_1+2} = \dots = x_{l_1+l_2} = X_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{l_1+\dots+l_{n-1}+1} = \dots = x_{l_1+\dots+l_n} = X_n.$$

e

$$K = \{1!\,2!\,3!\dots(l_1-1)!\}\{1!\,2!\,3!\dots(l_2-1)!\}\dots\{1!\,2!\,3!\dots(l_n-1)!\}.$$

Si conclude che

$$\begin{aligned} D = K(X_2 - X_1)^{l_1 l_2}(X_3 - X_1)^{l_1 l_3}\dots(X_n - X_1)^{l_1 l_n} \\ (X_3 - X_2)^{l_2 l_3}\dots(X_n - X_2)^{l_2 l_n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ (X_n - X_{n-1})^{l_{n-1} l_n}, \end{aligned}$$

cioè

$$D = K\Pi(X_i - X_j)^{l_i l_j} \qquad (i > j).$$

Per $l_1 = l_2 = \dots = l_n = 2$ si ha $K = 1$ e $D = \Delta^4(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
Per $l_1 = l_2 = \dots = l_n = \nu$ si ha

$$K = \{1!\,2!\,3!\dots(\nu-1)!\}^n$$

e

$$D = \{1!\,2!\,3!\dots(\nu-1)!\}^n \Delta^{\nu^2}(X_1, X_2, \dots, X_n).$$