Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giacomo Saban

Sulle congruenze di Guichard

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **6** (1951), n.1, p. 3–8.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_3_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1951.

Sulle congruenze di Guichard.

Nota di GIACOMO SABAN (ad Istanbul).

Sunto. - *Mediante l'uso di vettori dualistici viene data una semplice dimostrazione di due formule note, relative a proprietà metriche delle congruenze di* GUICHARD.

1. Il vettore dualistico unitario (¹)

$$\vec{R} = \vec{r} + \varepsilon \vec{\bar{r}} \qquad (\varepsilon^2 = 0,\ \vec{r}^2 = 1,\ \vec{r} \times \vec{\bar{r}} = 0)$$

rappresenta sulla sfera dualistica la retta di versore $\vec{r}$ e di momento $\vec{\bar{r}}$: similmente $\vec{R} = \vec{R}(u, v)$ è la rappresentazione dualistica di una congruenza rettilinea.

(²) Cfr. loc. cit. (¹).

(¹) Cfr. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. I, pp. 277 e sg., Berlino (1930). Per lo studio dualistico delle congruenze e dei complessi ved. altresì W. HAAK, *Differentialgeometrie der Strahlen-*

Supponiamo ora che le rigate coordinate $u = \text{cost.}$ e $v = \text{cost.}$ della congruenza siano le due superficie sviluppabili passanti per ciascun raggio: allora l'elemento dualistico lineare diventa

$$(1) \qquad \overline{dR}^2 = dS^2 = e(u, v)du^2 + 2[f(u, v) + \varepsilon\bar{f}(u, v)]du\,dv + g(u, v)dv^2.$$

Se inoltre le funzioni e e g sono rispettivamente indipendenti da v e da u, la trasformazione

$$u' = \int_0^u \sqrt{e(u)}\,du, \qquad v' = \int_0^v \sqrt{g(v)}\,dv$$

muta la (1) in

$$(2) \qquad dS^2 = du'^2 + 2[f'(u', v') + \varepsilon\bar{f}'(u', v')]du'dv' + dv'^2,$$

diremo allora che l'elemento lineare della congruenza può assumere la *forma dualistica di Tchebychef*, poichè, detto Ω l'angolo dualistico ([2]) ra le normali principali delle sviluppabili passanti per una retta della congruenza e sostituiti u', v' con u, v, la (2) diventa

$$(3) \qquad dS^2 = du^2 + 2\cos\Omega\,du\,dv + dv^2;$$

chiameremo in tal caso u e v i parametri di Tchebychef della congruenza ([3]).

2. Conveniamo di porre, per brevità

$$\vec{R}_u = \frac{\partial\vec{R}}{\partial u}, \quad \vec{R}_v = \frac{\partial\vec{R}}{\partial v}, \quad \vec{R}_{uu} = \frac{\partial^2\vec{R}}{\partial u^2}, \quad \text{ecc.}$$

komplexe, « Math. Zeitschr. », Bd. 40, 41 e 43 e « Monatsh. für Math. und Phys. », Bd. 44, ecc., Ph. Dwinger, *Differentiaalmeetkundige beschouwingen over lijnenstelsels*, Amsterdam (1939) e *Über ein System von drei Strahlenkongruenzen*, « Proceedings Ned. Akad. v. Wetenschappen », vol. 43, (1940). N. H. Kuiper, *Onderzoekingen over Lijnen meetkunde*, Amsterdam (1946), e *Differentiable Linesystems of one Dual Variable*, « Proceedings Ned. Akad. v. Wetenschappen », vol. 51 e « Indagat. Math. », vol. X (1948).

([2]) L'angolo dualistico fra due rette ha per parte reale l'angolo formato dai versori di queste, e per parte dualistica la loro minima distanza,

([3]) Converrà rilevare che la forma (3) caratterizza una classe particolare di congruenze, mentre la forma

$$dS^2 = dU^2 + 2\cos\Psi\,dU\,dV + dV^2,$$

usata da me altrove (cfr. G. Saban, *Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle congruenze rettilinee*, « Rend. Acad. Naz. Lincei », S. 8, vol. V, 3-4, (1948)), benchè in apparenza molto analoga, può appartenere

L'elemento lineare di una congruenza $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}(u, v)$ si può allora scrivere

$$dS^2 = (\overrightarrow{R}_u du + \overrightarrow{R}_v dv)^2$$

e se questa congruenza può assumere la forma dualistica di TCHEBYCHEF, ovviamente avremo

$$\overrightarrow{R}_u{}^2 = 1 \qquad \overrightarrow{R}_v{}^2 = 1 \tag{4}$$

$$\overrightarrow{R}_u \times \overrightarrow{R}_v = \cos \Omega \tag{5}$$

$$\overrightarrow{R}_u \wedge \overrightarrow{R}_v = \sin \Omega \, \overrightarrow{R}. \tag{6}$$

Derivando le (4) otteniamo

$$\overrightarrow{R}_u \times \overrightarrow{R}_{uv} = 0 \qquad \overrightarrow{R}_v \times \overrightarrow{R}_{uv} = 0$$

e da queste equazioni risulta

$$\overrightarrow{R}_{uv} = H \cdot \overrightarrow{R} \tag{7}$$

dove H è una funzione dualistica scalare di u e v.

Se ora deriviamo le (4) e (5) rispetto ad u, la (7) permette di scrivere

$$\overrightarrow{R}_u \times \overrightarrow{R}_{uu} = 0, \qquad \overrightarrow{R}_{uu} \times \overrightarrow{R}_v = -\sin \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial u}$$

e mediante la (6) si perviene alla seguente formula:

$$\overrightarrow{R}_{uu} = K \cdot \overrightarrow{R} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{R}_u: \tag{8}$$

K è pure uno scalare funzione dualistica degli argomenti u e v. Ma poichè $\overrightarrow{R}$ è unitario,

$$\overrightarrow{R} \times \overrightarrow{R}_u = 0$$

e

$$\overrightarrow{R}_u{}^2 + \overrightarrow{R} \times \overrightarrow{R}_{uu} = 0;$$

sostituendo i valori di $\overrightarrow{R}_u{}^2$ e $\overrightarrow{R}_{uu}$ presi dalle (4) e (8) si trova

a qualsiasi tipo di congruenza, essendo

$$U = U(u, v) = u + \varepsilon \int_0^u \delta_u(u, v) du, \quad V = V(u, v) = v + \varepsilon \int_0^v \delta_v(u, v) dv:$$

U e V sono quindi dei falsi parametri di TCHEBYCHEF.

$K = -1$, e la (8) diventa infine

$$\overrightarrow{R}_{uu} = -\overrightarrow{R} - \frac{\partial \Omega}{\partial u} \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{R}_u. \tag{9_1}$$

Se invece di derivare le (4) e (5) rispetto ad u, si eseguisce la derivazione rispetto a v, si ottiene analogamente

$$\overrightarrow{R}_{vv} = -\overrightarrow{R} - \frac{\partial \Omega}{\partial v} \overrightarrow{R} \wedge \overrightarrow{R}_v. \tag{9_2}$$

Consideriamo ora nella congruenza le sviluppabili $v = v_0 =$ cost. ed $u = u_0 =$ cost.: corrispondono a $\overrightarrow{R}_1 = \overrightarrow{R}(u, v_0) = \overrightarrow{R}_1(u)$ ed $\overrightarrow{R}_2 = \overrightarrow{R}_2(u_0, v) = \overrightarrow{R}_2(v)$. I triedri mobili di queste rigate (cioè i triedri formati dalla generatrice, dalla normale principale e dalla terza perpendicolare che costituisce insieme a queste due rette una terna triortogonale levogira) sono rispettivamente $(\overrightarrow{R}_1, \overrightarrow{R}_u, \overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_u)$ e $(\overrightarrow{R}_2, \overrightarrow{R}_v, \overrightarrow{R}_2 \wedge \overrightarrow{R}_v)$: dalle (9_1) e (9_2) si ottengono le formule di derivazione seguenti:

$$\begin{array}{llll}
\dot{\overrightarrow{R}}_1 = \overrightarrow{R}_u & & \overrightarrow{R}_2' = \overrightarrow{R}_v & \\
\dot{\overrightarrow{R}}_u = -\overrightarrow{R}_1 & - \dfrac{\partial \Omega}{\partial u} \overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_u; & \overrightarrow{R}_v' = -\overrightarrow{R}_2 & - \dfrac{\partial \Omega}{\partial v} \overrightarrow{R}_2 \wedge \overrightarrow{R}_v \\
(\overrightarrow{R}_1 \wedge \overrightarrow{R}_u)^{\cdot} = \dfrac{\partial \Omega}{\partial u} \overrightarrow{R}_u & & (\overrightarrow{R}_2 \wedge \overrightarrow{R}_v)' = \dfrac{\partial \Omega}{\partial v} \overrightarrow{R}_v &
\end{array}$$

dove $(\cdot)$ indica la derivazione rispetto ad u (unica variabile sulla prima sviluppabile) e $(')$ indica la derivazione rispetto a v (unica variabile sulla seconda sviluppabile). Paragonando queste formule con le formule di derivazione del BLASCHKE [4] pel vettore dualistico d'una sviluppabile, otteniamo

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} + T_1 = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial v} + T_2 = 0 \tag{10}$$

dove T_1 e T_2 sono gli invarianti dualistici (secondi invarianti dif-

[4] Le formule di BLASCHKE (vedi op. cit. in [1]) sono

$$\frac{d\overrightarrow{G}_1}{ds} = (1 + \varepsilon\delta)\overrightarrow{G}_2, \quad \frac{d\overrightarrow{G}_2}{ds} = -(1 + \varepsilon\delta)\overrightarrow{G}_1 + T\overrightarrow{G}_3, \quad \frac{d\overrightarrow{G}_3}{ds} = -T\overrightarrow{G}_2:$$

δ è il parametro distributore della rigata sotto esame, T è una quantità dualistica.

ferenziali) delle due sviluppabili (5). È stato dimostrato (6) che le equazioni (10) sono le condizioni cui devono verificare le sviluppabili d'una congruenza per tagliare le superficie focali lungo le linee di curvatura, cioè le (10) sono le condizioni perchè la congruenza data sia una *congruenza di Guichard*. Possiamo quindi concludere dicendo che *ogni congruenza il cui elemento lineare è suscettibile di trasformazione in forma di Tchebychef è una congruenza di Guichard* (7).

3. Applichiamo ora le condizioni di integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial u^2}$$

alle equazioni (7) e (9_1):

$$\frac{\partial H}{\partial u}\vec{R} + H\vec{R}_u = -\vec{R}_v - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v}\vec{R}\wedge\vec{R}_u - \frac{\partial \Omega}{\partial u}\vec{R}_v\wedge\vec{R}_u - \frac{\partial \Omega}{\partial u}\vec{R}\wedge\vec{R}_{uv}.$$

Ma, per la (7), l'ultimo termine del secondo membro è nullo, quindi potremo scrivere:

$$H\vec{R}_u + \vec{R}_v + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v}\vec{R}\wedge\vec{R}_u = -\frac{\partial H}{\partial u}\vec{R} + \frac{\partial \Omega}{\partial u}\vec{R}_u\wedge\vec{R}_v. \tag{11}$$

Osserviamo ora che derivando $\vec{R}\times\vec{R}_u = 0$ rispetto a v si trova

$$\vec{R}_u\times\vec{R}_v + \vec{R}\times\vec{R}_{uv} = 0$$

e la (5), unita alla (7), dà

$$\cos\Omega = \vec{R}_u\times\vec{R}_v = -H.$$

La (11), tenuto conto di questo e della (6), diventa

$$\vec{R}_v - \cos\Omega\,\vec{R}_u + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u\, \partial v}\vec{R}\wedge\vec{R}_u = \left(\frac{\partial \cos\Omega}{\partial u} + \frac{\partial \Omega}{\partial u}\operatorname{sen}\Omega\right)\vec{R}.$$

(5) Le formule di BLASCHKE assumono difatti in tal caso una forma più semplice, avendosi per le sviluppabili $\delta = 0$, sicchè T basta a caratterizzare la sviluppabile: T coincide allora con la *curvatura sferica dualistica* della rigata (cfr. K. ERIM, *Die höheren Differentialelements einer Regelflaeche und einer Raumkurve*, « Rev. Fac. Sciences Université d'Istanbul », vol. X, S. A., pp. 1-24 (1945).

(6) Cfr. la prima nota di KUIPER citata in (1).

(7) M. M. SLOTNICK, *A method of applying Tensor Analysis to the study of rectilinear congruences*, « Math. Zeitschr. », Bd. 28, pp. 10?-115, (1928).

Il coefficiente del vettore che figura al secondo membro essendo identicamente nullo, dall'equazione precedente si trae

$$\overrightarrow{R}_v - \cos\Omega\,\overrightarrow{R}_u + \frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}\overrightarrow{R}\wedge\overrightarrow{R}_u = 0 : \tag{12}$$

moltiplicando vettorialmente per $\overrightarrow{R}_v$ si ha

$$\cos\Omega\,\overrightarrow{R}_u \wedge \overrightarrow{R}_v + \frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}(\overrightarrow{R}_u \times \overrightarrow{R}_v)\overrightarrow{R} = 0$$

e infine, per le (5) e (6), si trova [8]

$$\operatorname{sen}\Omega + \frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Questa unica equazione dualistica si scinde nelle due equazioni reali

$$\operatorname{sen}\omega + \frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v} = 0 \tag{12_1}$$

$$\overline{\omega}\cos\omega + \frac{\partial^2\overline{\omega}}{\partial u\,\partial v} = 0. \tag{12_2}$$

ove ω è l'angolo reale che formano sulla sfera unitaria reale le curve coordinate, indicatrici delle generatrici delle sviluppabili della congruenza, cioè è l'angolo fra le normali principali delle due sviluppabili passanti per un medesimo raggio, ed $\overline{\omega}$ è la distanza reale fra queste normali principali, cioè $\overline{\omega} = 2\rho$, dove ρ è la distanza dal punto medio al punto focale sul raggio.

La prima di queste equazioni indica che sulla indicatrice sferica della congruenza esiste una rete di TCHEBYCHEF [9]. Le due equazioni (12_1) e (12_2) esprimono proprietà metriche note delle congruenze di GUICHARD [10].

Aggiungo che si ottiene la medesima formula dualistica se si moltiplica la (12) vettorialmente con $\overrightarrow{R}_u$ o scalarmente con $\overrightarrow{R}_v$.

[8] La dimostrazione di questa formula è stata ottenuta riproducendo, in modo opportuno, una argomentazione dovuta a T. BOGGIO (cfr. *Sulla curvatura delle superficie e sulle reti di Cebicef*, « Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari », Pavia (1936)).

[9] Sulle reti di TCHEBYCHEF sulla sfera cfr. L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. I, pp. 160-163, Bologna (1927).

[10] Per le equazioni $(13)_1$ e $(13)_2$ cfr. ancora L. BIANCHI, op. cit., vol. I, pp. 492-403.