
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ALDO PIETROSANTI

Sopra una questione proposta da A.
Moessner.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 6
(1951), n.1, p. 32–35.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_32_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sopra una questione proposta da A. Moessner.

Nota di ALDO PIETROSANTI (a Velletri).

Sunto. - *Si dà una nuova ed elementare dimostrazione della impossibilità di un sistema diofanteo proposto da A. Moessner.*

1. Nel fascicolo del marzo 1950 di questo « Bollettino » ⁽¹⁾, L. GATTESCHI e L. A. ROSATI, rispondendo ad una questione proposta da A. MOESSNER ⁽²⁾, hanno dimostrato che il sistema

$$(1) \quad A^2 + B^2 = C^2 + D^2, \quad A^3 + B^3 = C^3 + D^3$$

⁽¹⁾ « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », (3), 5, 1950, pag. 43 e seg. v. anche: B. SEGRE, *Alcune questioni diofantee*, medesimo fascicolo, pag. 33 e segg.

⁽²⁾ « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », (3), 4, 1949, pag. 146.

non ammette soluzioni in numeri interi oltre le soluzioni banali.

Dell'impossibilità del sistema diofanteo (1), si dà in quel che segue una nuova dimostrazione, che si ritiene affatto semplice ed elementare.

2. Il sistema dato ammette la soluzione banale $A = C$, $B = D$.

Supposto pertanto $A \neq C$, $C \neq D$, e, come ovviamente si può, $A > D$, $C > B$, le (1) possono rispettivamente scriversi come segue:

$$(2) \quad \frac{A-D}{C-B} = \frac{C+B}{A+D}; \quad \frac{A-D}{C-B} = \frac{C^2 + CB + C^2}{A^2 + AD + D^2};$$

e, se p/q è la frazione irriducibile tale che:

$$(3) \quad \frac{A-D}{C-B} = \frac{C+B}{A+D} = \frac{p}{q},$$

da queste si ricava

$$(4) \quad \begin{cases} A-D = \lambda p \\ C-B = \lambda q \end{cases}, \quad \begin{cases} C+B = \mu p \\ A+D = \mu q \end{cases}.$$

ove λ , μ son coefficienti (interi) di proporzionalità.

Le (4) forniscono

$$(5) \quad \begin{aligned} A &= \frac{\lambda p + \mu q}{2}, & B &= \frac{\mu p - \lambda q}{2} \\ C &= \frac{\lambda q + \mu p}{2}, & D &= \frac{\mu q - \lambda p}{2}. \end{aligned}$$

Giova fin da ora osservare che la indicata soluzione banale $A = C$, $B = D$ si ha, in virtù delle (5), in corrispondenza a valori dei parametri λ, μ, p, q soddisfacenti alla condizione $(\lambda - \mu)(p - q) = 0$, cioè:

$$\lambda = \mu, \quad \text{ovvero} \quad p = q.$$

Ciò posto, dalla seconda delle (2) e dalla (3) si ricava

$$\frac{C^2 + CB + B^2}{A^2 + AD + D^2} = \frac{p}{q},$$

e da questa, mediante le sostituzioni (5):

$$\frac{\mu^2 q^2 + 3\lambda^2 p^2}{\lambda^2 p^2 + 3\mu^2 q^2} = \frac{p}{q},$$

ovvero:

$$(6) \quad \lambda^2(p^3 - q^3) = 3\mu^2 pq(p - q).$$

Poichè si è supposto che sia $p - q \neq 0$ (per $p - q = 0$ si ha la

già indicata soluzione banale), dalla (6), dopo averne divisi i membri per $p - q$, si ricava facilmente:

$$(6') \quad \frac{p^2 + q^2}{pq} = \frac{3\mu^2 - \lambda^2}{\lambda^2},$$

3. Si osservi, ora, che, per la (1), i numeri A, B, C, D possono suppersi primi fra loro a tre a tre; e pertanto, attese le (5), λ e μ saranno primi fra loro, o tutt'al più sarà $D(\lambda, \mu) = 2$.

Ciò posto, essendo p, q primi fra loro, e di conseguenza irriducibile la frazione a primo membro della (6'), il secondo membro di questa sarà una frazione irriducibile, o tale diverrà dividendone i termini per 4. Corrispondentemente a queste due (esclusive) eventualità, la (6') può rispettivamente spezzarsi come segue

$$(6'') \quad \text{(I)} \quad \begin{cases} p^2 + q^2 = 3\mu^2 - \lambda^2 \\ pq = \lambda^2 \end{cases}, \quad \text{(II)} \quad \begin{cases} p^2 + q^2 = \frac{3\mu^2 - \lambda^2}{4} \\ pq = \frac{\lambda^2}{4} \end{cases}$$

e il secondo di questi sistemi assume la forma del primo, non appena λ e μ si sostituiscano rispettivamente $2\lambda', 2\mu'$, con λ', μ' primi fra loro.

Dal primo sistema, nel quale dunque λ, μ soddisfano alla condizione $D(\lambda, \mu) = 1$, si ricava facilmente

$$(p + q)^2 = 3\mu^2 + \lambda^2, \quad (p - q)^2 = 3(\mu^2 - \lambda^2).$$

I numeri $3\mu^2 + \lambda^2$ e $3(\mu^2 - \lambda^2)$ sono dunque due quadrati, e poichè sussiste l'identità

$$4\lambda^2 + 3(\mu^2 - \lambda^2) = 3\mu^2 + \lambda^2,$$

ne consegue che gl'interi $2\lambda, \sqrt{3(\mu^2 - \lambda^2)}$ e $\sqrt{3\mu^2 + \lambda^2}$ costituiscono una terna pitagorica, e pertanto esprimibili come segue:

$$(I) \quad 2\lambda = 2\varphi\psi; \quad (II) \quad \sqrt{3(\mu^2 - \lambda^2)} = \varphi^2 - \psi^2 \quad (III) \quad \sqrt{3\mu^2 + \lambda^2} = \varphi^2 + \psi^2,$$

cioè:

$$(7) \quad (I) \quad \lambda^2 = \varphi^2\psi^2; \quad (II) \quad 3(\mu^2 - \lambda^2) = (\varphi^2 - \psi^2)^2; \quad (III) \quad 3\lambda^2 + \mu^2 = (\varphi^2 + \psi^2)^2.$$

Con la eliminazione di λ fra la (I) e la (II) (ovvero la (III)), si ottiene:

$$(8) \quad 3\mu^2 = \varphi^4 + \psi^4 + \varphi^2\psi^2.$$

Ora, con riferimento alle (I) e (II) delle (7), si osservi che, essendone i rispettivi primi membri, λ^2 e $3(\mu^2 - \lambda^2)$, primi fra loro, tali saranno necessariamente anche φ e ψ , e pertanto gl'interi soddisfacenti alla (8) dovranno essere primi fra loro a due a due. L'unica

terna soddisfacente alla (8) e a tale condizione è $\mu = \varphi = \psi = 1$ ⁽³⁾. Dalla (I) delle (7) e (I) delle (6'') si deduce: $\lambda = p = q = 1$, e infine dalle (5): $A = C$, $B = D$, cioè una soluzione banale.

Si conclude che il sistema (1) non ammette soluzioni intere, oltre quelle banali, c. v. d..