
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MADDALENA CANTELE

Sulle funzioni quasi continue.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 6
(1951), n.1, p. 30–32.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_30_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sulle funzioni quasi continue.

Nota di MADDALENA CANTELE (a Bologna).

Sunto. - *Richiamate alcune notizie sul metodo proposto da TONELLI per l'esposizione dell'integrale di LEBESGUE in uno spazio euclideo S_n , si dà un esempio, adatto per un corso elementare, di una funzione quasi continua in un intervallo I , ma non continua su nessun sottoinsieme di misura pari ad I .*

1. È noto che l'integrale di LEBESGUE viene oggi esposto come caso particolare della generale teoria dell'integrazione. Tuttavia in varie recenti esposizioni a carattere elementare, l'integrale di LEBESGUE è definito come il limite di integrali di natura più elementare su funzioni continue, o semicontinue, o a scala. Fra queste esposizioni particolarmente semplici ⁽¹⁾ ricordo quella di TONELLI ⁽²⁾, basata sul concetto di funzione quasi continua. Introdotta elementarmente le nozioni di misura di un insieme aperto e di insieme di misura nulla in uno spazio euclideo S_n , qualsiasi, si dice che una funzione reale $f(x)$, $x \in I$, (I intervallo di S_n), è quasi continua in I se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme aperto O , di misura $|O| < \varepsilon$ tale che $f(x)$ è continua nell'insieme chiuso $I - O$ (cioè in tutti i punti x di $I - O$ rispetto ai soli valori assunti da $f(x)$ in $I - O$). Si dice che $\varphi(x)$, $x \in I$, è una funzione associata alla funzione $f(x)$ rispetto ad O se $\varphi(x)$ è continua in I e coincide con $f(x)$ in $I - O$ ⁽³⁾. Allora per ogni funzione reale $f(x)$, $x \in I$, q. c. si continua

⁽¹⁾ Tra le molte pubblicate in Italia e all'Estero, ricordo anche quella recente di E. J. MCSHANE, *Integration*, Princeton University Press, 1948.

⁽²⁾ L. TONELLI, *Sulla nozione di integrale*, « Annali di Matematica », ser. IV, tomo 1 (1923-24), pp. 105-121.

⁽³⁾ L'esistenza delle funzioni associate, che per $n = 1$ è elementarmente provata in loc. cit. in ⁽²⁾, risulta per ogni n , dal seguente teorema: Data una funzione $f(x)$, $x \in K$, definita e continua in un insieme chiuso $K \subset S_n$, esiste una funzione $F(x)$, $x \in S_n$, continua in S_n , coincidente con $f(x)$ in K . Per le numerose dimostrazioni, anche elementari, di tale teorema, si veda ad esempio: H. LEBESGUE, *Sur le problème de Dirichlet*, « Rendic. Circ. Mat. di Palermo », vol. 24 (2° sem. 1907), pp. 371-402 (spec. pp. 379-390); H. Tietze, *Ueber Funktionen die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind.*, « Journal für die reine und angew. Math. », Bd. 145, (1915), pp. 9-14; F. HAUSDORFF, *Ueber halbstetige Funktionen und deren Verallgemeine-*

e limitata, $|f(x)| \leq M, x \in I$, esiste il limite dell'integrale di MENGOLO-Cauchy della funzione associata $\varphi(x)$, $x \in I$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $|\varphi(x)| \leq M$ e tale limite è indipendente dalla scelta della funzione associata. Assunto questo limite come definizione dell'integrale di LEBESGUE in I della funzione quasi continua e limitata $f(x)$, $x \in I$, seguono tutte le estensioni alle funzioni non limitate, o definite in un insieme qualunque, e si stabilisce la serie dei teoremi fondamentali e la coincidenza dell'integrale così definito con l'integrale di LEBESGUE introdotto con altri mezzi (*).

2. Dalla definizione di funzione quasi continua scende immediatamente che ogni funzione $f(x)$, $x \in I$, continua quasi ovunque in I , è quasi continua in I . Infatti $f(x)$ è continua in tutti i punti di un insieme $I - E$ (E di misura nulla) rispetto ai valori assunti da $f(x)$ in I , pertanto $f(x)$ è continua su ogni insieme $I - O$, ove O è un insieme aperto ricoprente E .

D'altra parte una funzione $f(x)$, $x \in I$, quasi continua in I , è necessariamente continua su infiniti insiemi chiusi $I - O$, O aperto, con O di misura piccola quanto si vuole, ma $f(x)$ non è necessariamente continua su nessun insieme del tipo $I - E$ con E di misura nulla, neppure rispetto ai soli valori assunti da $f(x)$ in $I - E$. Questo fatto è ben noto, per quanto nelle esposizioni elementari dell'integrale di LEBESGUE a me conosciute non ho incontrato un esempio semplice, che possa essere esposto agli studenti del biennio e sulle sole nozioni introdotte avanti, di una funzione $f(x)$ quasi continua in I e non continua su nessun insieme del tipo $I - E$ con E di misura nulla. Scopo della presente nota è di dare in poche righe un esempio siffatto.

rung, « Math. Zeitschr. », Bd. 5 (1919), pp. 292-309; L. E. J. BROUWER, *Ueber die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion.*, « Mathem. Ann. », Bd. 79 (1919), pp. 209-211 e p. 408; C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire*, Gauthier-Villars, 1916 (spec. p. 127); C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen ueber reelle Funktionen*, G. B. Teubner, 1ª ediz., 1918, pp. 617-620; 2ª ediz., 1927, pp. 617-620; L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Zanichelli, 1923, Vol. I, (spec. pp. 383-385); P. URYSOHN, *Ueber die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, « Mathem. Annalen », Bd. 94 (1925), pp. 262-295; H. WHITNEY, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, « Transactions of the American Mathem. Soc. », XX, vol. 36 (1934), pp. 63-89. spec. nota piè di pagina 63; E. J. MC SHANE, *Extension of range of functions*, « Bulletin Amer. Math. Soc. », vol. 40 (1934), pp. 837-842.

(*) Tale procedimento è esposto per $n=1$ in loc. cit. in (2) e vale, in sostanza, per ogni n .

3. Sia $n = 1$ e sia I l'intervallo $0 \leq x \leq 1$. Sia I_1 l'intervallo aperto concentrico ad I di lunghezza $1/2 \cdot 3$; I_1 lascia scoperti su I due intervalli chiusi ed uguali. Diciamo $I_{2,1}, I_{2,2}$ gli intervalli aperti, uguali, concentrici a questi ultimi, di lunghezze $1/2 \cdot 3^2$; i quali, insieme a I_1 , lasciano scoperti su I quattro intervalli chiusi ed uguali. Così procedendo, alla n^{ma} operazione avremo 2^{n-1} intervalli aperti $I_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, di lunghezza ciascuno $1/2 \cdot 3^n$, i quali insieme a tutti i precedenti $I_{r,j}$, $j = 1, 2, \dots, 2^{r-1}$, $r = 1, 2, \dots, n-1$, lasciano scoperti, su I , 2^n intervalli chiusi ed uguali. Così proseguendo indefinitamente avremo infiniti intervalli aperti $I_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, 2^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, la cui somma è un insieme aperto $O \subset I$ di misura $|O| = \sum \sum |I_{n,i}| = 1/2 \cdot 3 + 2/2 \cdot 3^2 + 2^2/2 \cdot 3^3 + \dots = 1/2$. L'insieme $C = I - O$ (analogo all'insieme di CANTOR) è limitato, chiuso, perfetto, mai denso e non di misura nulla. Sia $f(x) = 1$ se $x \in O$, $f(x) = 0$ se $x \in C$. La funzione $f(x)$, come funzione caratteristica di un insieme aperto, si prova essere quasi continua in I . Dimostriamo che $f(x)$ non è continua su nessun insieme $I - E$ con $|E| = 0$. Sia E un insieme di misura nulla, $E \subset I$, e sia, se possibile, $f(x)$ continua in $I - E$. Ogni punto $x_0 \in I - E$ è punto di accumulazione di punti $x \in O$ (altrimenti C conterrebbe un intervallo) e in ogni intervallo $u \subset O$ vi sono punti di $I - E$ (altrimenti $u \subset E$ ed E non sarebbe di misura nulla). Pertanto x_0 è punto di accumulazione di punti $x \in O$ ($I - E$) nei quali $f(x) = 1$. Per la continuità di $f(x)$ in $I - E$ rispetto ai valori assunti da $f(x)$ in $I - E$, risulta $f(x_0) = 1$, cioè $f(x) = 1$ quasi dappertutto in I e perciò $|C| = 0$, ciò che è assurdo. Pertanto $f(x)$ non è continua su nessun insieme $I - E$ con E di misura nulla.