
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GUIDO VAONA

Ancora sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 6
(1951), n.1, p. 14–17.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1951_3_6_1_14_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Ancora sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna).

Sunto. - Si determinano le condizioni necessarie e sufficienti affinché si verifichi il caso cremoniano nelle trasformazioni puntuali fra due S_r .

1. Il VILLA ha rilevato per primo che una trasformazione puntuale fra due piani in una coppia a Jacobiano nullo non è, in generale, osculabile con una trasformazione cremoniana, ed ha dimostrato che perché l'osculazione sia possibile è necessario e

sufficiente che la tangente alla Jacobiana coincida colla tangente stazionaria ⁽¹⁾.

È questo il caso che il VILLA chiama *cremoniano* in quanto è possibile l'osculazione con trasformazioni cremoniane.

Anche per le trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari sono state determinate le condizioni necessarie e sufficienti per il verificarsi del caso cremoniano ⁽²⁾.

Nella presente Nota si dimostra più in generale:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione puntuale fra due spazi lineari S_r, S'_r ($r > 1$) si possa approssimare fino all'intorno del 2° ordine di una coppia (O, O') a Jacobiano nullo di caratteristica k ($1 \leq k \leq r - 1$) (O di molteplicità $r - k$ per la Jacobiana), con una trasformazione cremoniana è che le ipersuperficie corrispondenti agli iperpiani per O' abbiano in comune una calotta σ^2_{-k} (di dimensione $r - k$ e di ordine 2) di centro O .

Nel caso in cui la caratteristica è uguale ad $r - 1$ e il punto O è semplice per la Jacobiana, la condizione necessaria e sufficiente precedente può essere posta anche nella forma equivalente:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione puntuale fra due spazi lineari S_r, S'_r ($r > 1$) si possa approssimare fino all'intorno del 2° ordine di una coppia (O, O') a Jacobiano nullo (O punto semplice della Jacobiana), con una trasformazione cremoniana è che la retta stazionaria per O sia ivi tangente alla Jacobiana.

2. La condizione è necessaria. Ricordiamo ⁽³⁾ che se (O, O') è una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo e di caratteristica k , agli iperpiani passanti per O' corrispondono, fino all'intorno del 1° ordine, degli iperpiani passanti per O aventi un S_{r-k} comune (l' S_{r-k} stazionario). Si supponga ora che una trasformazione

⁽¹⁾ Si veda: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano*, « Rend. dell' Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. II, p. 136 (1947). Si veda pure: E. BOMPIANI, *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani*, « Rend. dell' Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. II, p. 22 (1947).

⁽²⁾ Si veda: M. VILLA e G. VAONA, *Sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali fra due piani o spazi*, questo « Bollettino », ser. III, vol. V, p. 48 (1950).

⁽³⁾ Si veda: M. VILLA e G. VAONA, *Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. I. Intorno del 2° ordine*, « Rend. dell' Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. VI, p. 185 (1949).

puntuale T si possa approssimare, fino all'intorno del 2° ordine di una coppia (O, O') del tipo descritto, mediante una trasformazione cremoniana T_0 . Agli iperpiani per O corrispondono in T_0 ipersuperficie di un sistema omaloidico $|M|$ tangenti in O all' S_{r-k} stazionario e non aventi spazio tangente comune di dimensione $> r - k$ ⁽⁴⁾. Segue che tali ipersuperficie hanno in comune una V_{r-k} fondamentale passante per O . È noto infatti che se le ipersuperficie di un sistema omaloidico, passanti per un punto O (non base), passano anche per un altro punto P (non base), hanno in comune una varietà fondamentale passante per O e P . Nel nostro caso le ipersuperficie di $|M|$ passanti per O passano anche per i punti appartenenti all'intorno del 1° ordine di O e giacenti sull' S_{r-k} stazionario. Tali punti devono dunque appartenere con O ad una medesima varietà fondamentale. Questa varietà ha esattamente dimensione $r - k$, essendo tale la dimensione del suo spazio tangente in O .

Siccome T_0 approssima T fino al 2° ordine di (O, O') , le ipersuperficie corrispondenti in T agli iperpiani per O' dovranno necessariamente contenere la calotta σ^2_{r-k} di centro O appartenente alla $r - k$ fondamentale di T_0 .

La condizione è sufficiente. Una trasformazione puntuale T fra $S_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$, $S'_r(y_1, y_2, \dots, y_r)$, nell'intorno di una coppia a Jacobiano nullo e di caratteristica k ($1 \leq k \leq r - 1$), si può sempre rappresentare con sviluppi in serie, del tipo

$$\begin{aligned} y_i &= ax_i + \sum_j a^s_{ij} x_i x_j + [3] \\ y_t &= \sum_j a^t_{sj} x_s x_j + [3] \quad (i, j = 1, 2, \dots, r; \\ &\quad s = 1, \dots, k; t = k + 1, \dots, r), \end{aligned}$$

dove le a_{ij} sono costanti ed è $a_{ij} = a_{ji}$, ed inoltre $a \neq 0$ ⁽⁵⁾.

Imponendo a T di soddisfare alla condizione enunciata, si ha

$$a^t_{m,n} = 0 \quad (m, n, t = k + 1, \dots, r).$$

Le equazioni di una qualsiasi trasformazione T nelle condizioni anzidette si possono scrivere

$$\begin{aligned} y_i &= ax_i + \sum_j a^s_{ij} x_i x_j + [3] \\ y_t &= 2 \sum_{pm} a^t_{pm} x_p x_m + \sum_{ps} a^t_{ps} x_p x_s + [3] \\ &\quad (p = 1, 2, \dots, k), \end{aligned}$$

⁽⁴⁾ In questa ipotesi lo spazio stazionario avrebbe dimensione $> r - k$ e quindi la caratteristica del determinante Jacobiano sarebbe $< k$.

⁽⁵⁾ Si veda: op. cit. in ⁽³⁾.

Se si vuole che la ipersuperficie Jacobiana abbia in O esattamente la molteplicità $r - k$, dovrà essere ~~non~~ identico a zero il determinante

$$|\Sigma_p a^t_{pm} x_p|.$$

Si consideri ora la trasformazione $\bar{T}$ prodotto delle due trasformazioni razionali T_1 e T_2 di equazioni

$$\begin{aligned} T_1) \quad & y_i = \xi_i \\ & y_t = \frac{2}{a} \Sigma a^t_{pm} \xi_p \xi_m + \frac{1}{a^2} \Sigma a^t_{ps} \xi_p \xi_s; \\ T_2) \quad & \xi_i = ax_i + \Sigma a^i_{ij} x_j \\ & \xi_t = x_t. \end{aligned}$$

La trasformazione razionale $\bar{T}$ approssima la T fino all'interno del 2° ordine di (O, O') . Basterà evidentemente trovare due trasformazioni cremoniane che approssimino la T_1 e T_2 rispettivamente; il loro prodotto è una trasformazione cremoniana che approssima la $\bar{T}$ e quindi la T .

Si osservi che T_1 è essa stessa una trasformazione cremoniana quadratica. Infatti, essendo per ipotesi $|\Sigma_p a^t_{pm} x_p| \neq 0$, dalle equazioni di T_1 si possono univocamente ricavare le inverse.

Inoltre T_2 è una trasformazione razionale regolare nella coppia (O, O') (a Jacobiano non nullo) e perciò, come è ben noto ⁽⁶⁾, è approssimabile con trasformazioni cremoniane fino ad un intorno di qualsiasi ordine.

⁽⁶⁾ M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. Nota III, « Rend. dell' Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. IV, p. 295 (1948). Si veda pure: B. SEGRE, *Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane*, « Annali di Matematica », ser. IV, vol. XXVIII, p. 105 (1950); C. F. MANARA, *Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane*, « Rend. dell' Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. VIII, p. 103 (1950).