Bollettino
Unione Matematica Italiana

Leonard Roth

Metodi ed esempi nella teoria delle varietà unirazionali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 330–336.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_330_0>

Metodi ed esempi nella teoria delle varietà unirazionali.

Conferenza di LEONARD ROTH (a Londra) (*).

Sunto. - *Si da uno sguardo d'assieme ai metodi ed ai problemi che si presentano nella teoria delle varietà unirazionali.*

1. In seguito alle classiche ricerche sulle curve e superficie razionali di NOETHER e CASTELNUOVO, i geometri si volsero allo studio di problemi consimili per le varietà algebriche di dimensione superiore, però senza alcun successo significativo. Tuttavia, la scoperta di qualche esempio isolato, da parte di ENRIQUES e di FANO, suggerì ai ricercatori un problema più agevole ma di maggiore portata, e cioè quello di determinare condizioni di unirazionalità per le varietà algebriche. Per le forme di ordine qualunque, tale problema è stato risolto dal MORIN (7, 8, 9) negli

(*) Conferenza tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Bologna il 20 aprile 1950.

anni 1936-40. Più recentemente quest' ordine di ricerche ebbe notevole impulso dall' imponente serie di memorie, nel campo aritmetico-geometrico, che B. SEGRE ha dedicato allo studio delle varietà. Tra i lavori ispirati da dette ricerche va segnalata la Memoria (11) del PREDONZAN (1948) sull' unirazionalità dell' intersezione di più forme.

2. Vogliamo ora dare uno sguardo d' assieme ai metodi ed ai problemi che si presentano in questo campo, coll' aggiunta di alcuni contributi. Incominciamo con qualche definizione. Sia V_r una varietà algebrica irriducibile, definita in un campo commutativo γ; allora, se, rimanendo in γ, possiamo trovare per V_r una rappresentazione parametrica razionale, diremo che V_r è *unirazionale in* γ: tale rappresentazione fornisce allora una rappresentazione in γ di V_r sopra una involuzione I_n di S_r, di un certo ordine $n \geq 1$. In particolare può essere $n = 1$, il che significa che le equazioni esprimenti le coordinate del punto generico di V_r in funzioni dei parametri si possono invertire, in modo che ciascun parametro risulta una funzione razionale delle coordinate: diremo allora che V_r è *birazionale* [1] *in* γ; e la rappresentazione si chiamerà rispettivamente unirazionale o birazionale.

Esempi di varietà birazionali ed ivi definite in γ sono: ogni spazio lineare, ogni curva birazionale di ordine dispari, la superficie di VERONESE e quella di DEL PEZZO di ordine cinque. Ma gli esempi sono piuttosto rari, il che si rispecchia in una scarsità di teoremi sull' argomento. Le questioni sull' unirazionalità sono invece assai più semplici, in quanto, se una data V_r è unirazionale, lo è sovente in qualche estensione di γ facilmente determinabile, ad esempio in quella ottenuta aggiungendo a γ l' irrazionalità da cui dipende la determinazione di uno spazio S_h $(h \geq 0)$ giacente su V_r: diremo allora che V_r è *unirazionale* oppure *birazionale in* γ (S_h). In particolare, se $h = 0$, diremo che V_r è *unirazionale* o *birazionale in* $\gamma(P)$, essendo P un punto generico della varietà. Può inoltre accadere che una V_r, la quale sia birazionale in una certa estensione di γ, risulti soltanto unirazionale in una data estensione di γ, meno ampia della precedente, ciò che costituisce una delle principali difficoltà della teoria.

Possiamo similmente parlare di unirazionalità o birazionalità in $\gamma(I)$, denotando con I un insieme opportuno di sotto-varietà di V_r. Lo studio di siffatte estensioni $\gamma(I)$ è fondamentale per tutti i problemi di questo genere. Il caso delle superficie birazio-

[1] Oppure *razionale*, secondo la terminologia classica.

nali è stato studiato dall'ENRIQUES (3), il quale ha determinato i diversi tipi di irrazionalità che intervengono nella rappresentazione birazionale di una superficie birazionale. Se invece si esige soltanto che la rappresentazione sia unirazionale (del che l'ENRIQUES non si occupa), allora le varie irrazionalità che entrano in giuoco risultano meno numerose e complicate, come illustriamo nel seguito.

3. Premettiamo un'osservazione su cui poggiano vari dei metodi che finora sono stati impiegati nella ricerca delle rappresentazioni unirazionali.

Dato su V_r *un sistema birazionale* ∞^{r-k} *di varietà* V_k. *avente un qualunque indice* $\nu \geq 1$, *se è possibile di determinare razionalmente sulla generica* V_k *un* S_h $(h \geq 0)$ *tale che* V_k *sia unirazionale in* $\gamma(S_h)$, *allora* V_r *è unirazionale. Inoltre, se* $\nu = 1$ *e* V_k *è birazionale in* $\gamma(S_h)$, *allora* V_r *risulta birazionale.*

Quale primo esempio di applicazione del criterio precedente, consideriamo una forma cubica generica Φ_r^3, di dimensione $r \geq 2$, e fissiamo una sua retta l; allora gli iperpiani tangenti nei singoli punti P di l segano su Φ_r^3 un sistema birazionale, di indice 2, di monoidi cubici che sono birazionali in $\gamma(P)$, sicchè Φ_r^3 viene rappresentata sopra una I_2.

Un altro esempio: si consideri la forma quartica Φ_3^4 di S_4 di equazione $Q_1Q_2 = Q_3Q_4$, ove Q_1 ecc. sono forme quadriche generiche passanti per una cubica sghemba c^3, la quale risulterà evidentemente doppia per la Φ_3^4. Quest'ultima contiene un fascio lineare di superfice $Q_1 = \lambda Q_3$, $Q_4 = \lambda Q_2$, sulla generica delle quali risulta determinata razionalmente una retta l nell'iperpiano della cubica c^3. Ma una tale superficie è notoriamente birazionale in $\gamma(l)$ (n. 7); quindi Φ_3^4 risulta anch'essa birazionale.

Infine, se V_r contiene un sistema birazionale, di indice 1, di superficie di VERONESE oppure di superficie quintiche di DEL PEZZO, essa risulta birazionale, purchè la generica superficie del sistema sia irriducibile: risultato stabilito per $r = 3$ dall'ENRIQUES (3).

4. Un caso importante del criterio precedente è quello in cui $h = 0$, ossià quando lo spazio S_h riducesi ad un punto P. Dimostriamo al riguardo il teorema:

Se V_r *contiene un sistema birazionale* ∞^{r-k}, *di indice* 1, *di varietà* V_k *multisecanti una* V_{r-k} *fissa; e se questa* V_{r-k} *è unirazionale (in un campo qualunque), mentre la generica* V_k *è unirazionale in* $\gamma(P)$, *allora* V_r *risulta anch'essa unirazionale.*

Secondo le ipotesi fatte, il sistema $\{ V_k \}$ può riferirsi birazionalmente alla totalità degli S_{k+1} di S_{r+1} passanti per un S_k fisso. Ora proiettiamo ciascuna V_k, da un centro di dimensione complementare, sopra il corrispondente S_{k+1}; il sistema $\{ W_k \}$ così ottenuto genera una forma W_r, la quale sarà birazionalmente equivalente a V_r, in quanto il sistema $\{ W_k \}$ ha l'indice 1. La V_{r-k} viene così trasformata in una W_{r-k} unirazionale, e quindi le coordinate del suo punto P generico sono esprimibili come funzioni razionali di $r-k$ parametri essenziali. Per P passa una ed una sola W_k del sistema $\{ W_k \}$, la quale è unirazionale in $\gamma(P)$, poichè una proprietà analoga sussiste per V_k. In tal guisa le coordinate del punto generico di W_k risultano funzioni razionali degli $r-k$ parametri già nominati, e di altri k parametri che intervengono nella rappresentazione unirazionale di W_k; e siccome il punto generico di W_r sta su di una sola W_k, il teorema rimane stabilito.

Possiamo facilmente determinare l'ordine dell'involuzione su cui V_r viene così rappresentata. Infatti, se V_{r-k} è rappresentata sopra una I_a, e V_k è rappresentata in $\gamma(P)$ sopra una I_b, mentre V_k incontra V_{r-k} secondo un gruppo di c punti, allora V_r risulta rappresentata sopra una I_{abc}.

5. Il teorema precedente si estende al caso in cui V_{r-k} venga sostituita da una V_ρ di dimensione $\rho < r-k$, purchè quest'ultima sia *semplice* per V_r, osservando che in tal caso, mediante un conveniente sistema lineare di forme passanti per V_ρ, V_r si trasforma in una varietà a cui quel teorema può venir applicato. In particolare può aversi $\rho = 0$, il che significa che il sistema $\{ V_k \}$ ha almeno un punto base semplice. Sotto opportune condizioni V_ρ può supporsi multipla per V_r: ad esempio, la forma quartica più generale di S_4 dotata di retta doppia è unirazionale e rappresentabile sopra una I_2.

6. Il caso più semplice del n. 4, $k=1$, fornisce un risultato notevole in virtù di un teorema, che risale a M. NOETHER, secondo cui ogni curva birazionale è rappresentabile birazionalmente in $\gamma(P)$, ove P è un suo punto generico. Si ottiene quindi che

Se V_r *contiene un sistema birazionale* ∞^{r-1}, *di indice* 1, *di curve birazionali, secanti in* c *punti una* V_{r-1} *fissa, e se* V_{r-1} *è rappresentabile sopra una* I_a, *allora* V_r *è unirazionale e rappresentabile sopra una* I_{ac}.

Un caso particolare ben noto, dovuto all'ENRIQUES (4), che ne ha dato una dimostrazione diversa, è quello in cui $a=1$, e cioè

V_{r-1} risulta birazionale. Se $a = c = 1$, il teorema fornisce un criterio sufficiente per la birazionalità di V_r. Qui però ci imbattiamo in una difficoltà nella teoria delle V_r di dimensione $r > 2$ che non ha l'analogo nel caso delle superficie. Il NOETHER ha infatti dimostrato che, se una superficie contiene un fascio lineare di curve birazionali, esso possiede di conseguenza una curva unisecante, sicchè la superficie è necessariamente birazionale; mentre invece le ricerche del MONTESANO sulle V_3 hanno mostrato che una V_r (con $r > 2$) può contenere un sistema birazionale d'indice 1, di curve birazionali, senza che ciò implichi l'esistenza di qualche V_{r-1} unisecante.

7. Diamo ora qualche applicazione dei precedenti teoremi.

(i) Abbiamo già visto che la forma cubica generale Φ_r^3 (ove $r \geq 2$) è unirazionale in $\gamma(l)$; si perviene in altro modo a tale risultato osservando che Φ_r^3 contiene un sistema birazionale di coniche bisecanti la l, sicchè essa è rappresentabile sopra una I_2. Notiamo pure che Φ_r^3 è unirazionale in $\gamma(P)$ e rappresentabile sopra una I_6: basta all'uopo fissare un piano tangente π in P ed utilizzare come al n. 3 gli iperpiani tangenti a Φ_r^3 nei singoli punti della curva comune a π e Φ_r^3.

(ii) Consideriamo, in secondo luogo, l'intersezione V_r^4 di due quadriche generiche di S_{r+2} (con $r \geq 2$). La V_r^4, da una delle sue ∞^{r-4} rette, l, viene proiettata birazionalmente sopra S_r, sicchè è birazionale in $\gamma(l)$. Essa è pure unirazionale in $\gamma(P)$, e rappresentabile sopra una I_2, perchè si proietta da P in una forma cubica (non generale, bensì contenente un S_{r-1}) a cui si può applicare il precedente risultato.

Più generalmente, si ha che

L'intersezione completa di m (> 2) *quadriche generiche è unirazionale, e rappresentabile sopra una* I_{2m-2}, *non appena contenga qualche* S_{m-2}, *e birazionale non appena contenga qualche* S_{m-1}.

La prima parte di questo teorema verrà dimostrata in un altro lavoro; la seconda, già nota in Inghilterra da molto tempo, fu trovata indipendentemente da GAUTHIER (6) nel 1944.

(iii) Stabiliremo ora il seguente teorema:

Ogni complesso quadratico generale di rette di S_r ($r > 3$) *è unirazionale.*

Più precisamente, vedremo che *la varietà ad esso corrispondente sulla relativa grassmanniana* $G(r)$ *è unirazionale in* $\gamma(P)$ *e rappresentabile sopra una* I_2. Osserviamo anzitutto che, fissando una qualunque coppia l, m, di rette sghembe, resta univocamente definito in S_r l'S_3 che le congiunge; pertanto su $G(r)$ vi è una ed una sola $G(3)$ — cioè una quadrica V_4^2 — che contenga due punti L, M generici di $G(r)$. Segando $G(r)$ con una quadrica del suo spazio ambiente passante per L, otteniamo sulla varietà che rappresenta il complesso quadratico un sistema $|V_3^4|$ d'indice 1, con punto base semplice in L, e quindi birazionale; e abbiamo già visto che V_3^4 è unirazionale in $\gamma(L)$ e rappresentabile sopra una I_2, sicchè il teorema rimane stabilito in virtù del n. 4. Nel caso $r = 4$ (come notoriamente nel caso $r = 3$), si può inoltre dimostrare che il complesso quadratico è birazionale (ROTH, 12).

Partendo dal precedente risultato, e procedendo per induzione rispetto a k, si può stabilire che il complesso quadratico generale degli S_k di S_r è unirazionale e rappresentabile sopra un'involuzione di ordine 2^k.

(iv) Il MORIN (7) ha dimostrato che la Φ_r^4 generale di S_{r+1} è unirazionale e rappresentabile sopra una I_6, non appena contenga qualche piano, il che avviene per $r \geq 6$. Otterremo ora in altro modo alcuni risultati analoghi al suddetto. Anzitutto, se una Φ_3^4 viene specializzata in modo da acquistare un piano π, gli iperpiani passanti per π segano su Φ_3^4 un fascio lineare di superficie cubiche F^3, il quale in generale avrà 9 punti base. Fissando la nostra attenzione su uno P di questi, ed osservando che ognuna delle F^3 è unirazionale in $\gamma(P)$ e rappresentabile sopra un I_6, vediamo che Φ_3^4 è unirazionale e rappresentabile sopra una I_6 (n. 4). Consideriamo poi una Φ_6^4 che contenga un S_5; gli iperpiani passanti per esso segano su Φ_6^4 un fascio lineare di V_5^3 avente come varietà base una V_3^9 di S_5, la quale in generale contiene un numero finito di rette; utilizzando una qualsiasi di esse, si ha similmente che Φ_6^4 è unirazionale e rappresentabile sopra una I_2.

(v) Abbiamo visto che le forme quadriche e cubiche, nonchè l'intersezione completa di due quadriche, sono unirazionali in $\gamma(P)$ qualora abbiano i generi nulli. Un problema interessante sarebbe quello di vedere se vi sono altri esempi analoghi d'intersezioni complete.

8. Un altro metodo per stabilire l'unirazionalità è quello con cui il CASTELNUOVO (2) ha dimostrato che ogni superficie regolare contenente una rete di curve ellittiche è birazionale. Tale metodo può venir applicato a certe varietà V_r luoghi di curve ellittiche, di dimensione $r > 2$, e la sua importanza sta principalmente nel fatto ch'esso fornisce dei risultati finora non ottenuti per altra via. Ci limiteremo al seguente esempio, dovuto a ENRIQUES (5), relativo alla intersezione V_3^6 d'una quadrica Φ^2 e d'una forma

cubica Φ^3 generiche di S_5. Scegliamo anzitutto uno dei due sistemi birazionali ∞^3 di piani giacenti su Φ^2, il che può farsi in un'opportuna estensione quadratica δ di γ, Segando tali piani con Φ^3 otteniamo ∞^3 cubiche C ellittiche, e le ∞^1 C passanti per il punto P generico di V_3^6 formano un sistema birazionale. Su ciascuna C resta determinato razionalmeute il punto Q tangenziale di P; il luogo di Q sarà una curva irriducibile K, birazionale in $\delta(P)$, e precisamente la sestica, con punto quadruplo in P, sezione della V_3^6 con l'S_3 ad essa tangente in P. Ora costruiamo l'analoga curva K' per ogni singola posizione P' di P su K; il luogo delle K' è una superficie birazionale F. Se poi costruiamo le curve analoghe K'' per ogni singola posizione P'' di P su F, otteniamo su V_3^6 un sistema birazionale ∞^2 di curve, d'indice 216, sicchè, in base al n. 3, V_3^6 risulta unirazionale e l'ordine dell'involuzione su cui essa viene a rappresentarsi vale 216. Quest'ultima precisazione è dovuta all'APRILE (1), il quale ha pure mostrato che, sostituendo a K una delle ∞^1 rette giacenti su V_3^6, si riesce in modo consimile a rappresentare la varietà sopra una I_{36}.

Quali ulteriori applicazioni del metodo citiamo i seguenti risultati, che verranno stabiliti altrove.

(i) Ogni forma Φ_r^4 (con $r \geq 4$) che contenga una rigata birazionale, e che sia priva di punti singolari, è unirazionale; ciò include come caso particolare la proprietà relativa alla Φ_r^4 contenente un piano (n. 7).

(ii) Ogni spazio doppio S_r avente come forma di diramazione una quartica generale è unirazionale: teorema già stabilito per $r = 2$ dal NOETHER (10) e per $r = 3$ dall'ENRIQUES (3).

(iii) Ogni complesso cubico generale di S_k in S_r ($r \geq 3$) è unirazionale.

BIBLIOGRAFIA

1. G. APRILE, « Rassegna di Mat. e Fis. », 1 (1921), 135.
2. G. CASTELNUOVO, « Rend. Acc. Lincei », (5) 3 (1894)$_1$, 473.
3. F. ENRIQUES, « Math. Annalen », 49 (1897), 1.
4. — — « Annali di Mat. », (3) 20 (1913), 109.
5. — — « Rend. Acc. Lincei », (5) 21 (1912)$_1$, 81.
6. L GAUTHIER, « Bull. Soc. Roy. Liège », 13 (1944), 191.
7. U MORIN, « Rend. Acc. Lincei », (6) 24 (1936)$_1$, 191.
8. — — ibid, (6) 27 (1938)$_1$, 330.
9. — — « Atti II Congr. Un Mat. Ital. », (Bologna, 1940), 298.
10. M. NOETHER, « Math. Annalen », 33 (1889), 543.
11. A. PREDONZAN, « Rend. Semin. Padova », (18) (1949), 163.
12. L. ROTH, « Annali di Mat. », (4) 28 (1949).