

---

# BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

N. MINORSKY

## Meccanica non-lineare

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 5*  
(1950), n.3-4, p. 313-330.

Zanichelli

<[http://www.bdim.eu/item?id=BUMI\\_1950\\_3\\_5\\_3-4\\_313\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_313_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## Meccanica non-lineare.

Conferenza di N. MINORSKY (à Aix en Provence (\*)).

**Sunto.** - *Si riassumono i metodi di POINCARÉ, VAN DER POL, KRYLOFF e BOGOLIUBOFF per lo studio delle oscillazioni non lineari e le ricerche della scuola russa sulla sincronizzazione e sulla risonanza non-lineare.*

1. **Introduzione.** - È sorto, da circa vent'anni, un nuovo ramo della Fisica Matematica, che si indica spesso col nome di « Meccanica non-lineare » e che si occupa principalmente dei fenomeni periodici retti da equazioni differenziali non lineari.

Il primo impulso per lo sviluppo di queste ricerche si è avuto con l'introduzione di circuiti contenenti tubi elettronici ed è merito dell'olandese B. VAN DER POL l'aver richiamato su esse la attenzione dei fisici ed avere indicato un'equazione differenziale non lineare che oggi porta il suo nome e che rappresenta un gran numero dei fenomeni in discorso.

Le ricerche ora accennate sono state riprese più tardi (verso il 1930) in U. S. S. R. da un gran numero di matematici e fisici sotto la direzione generale di L. MANDELSTAM ed N. PAPALEXI, come risulta da numerosi e importanti lavori pubblicati fra il 1930 e l'inizio della seconda guerra mondiale.

(<sup>6</sup>) Il prof. TRICOMI in una sua lettera del 24 ottobre 1950 mi fa notare che la formula (20') sussiste per  $n=2, \dots, 9$  ed  $[(n+2)/6]+1 \leq r \leq [n/2]$ .

(\*) Conferenza tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Bologna il 28 gennaio 1950.

Dopo la guerra studi analoghi furono organizzati in U. S. A. grazie alla iniziativa del « Office of Naval Research » e sono stati ottenuti altri importanti contributi.

Essi si fondano sui lavori classici di H. POINCARÉ sull'esistenza di soluzioni periodiche di equazioni differenziali non-lineari prossime ad un'equazione lineare corrispondente o, utilizzando un linguaggio meno preciso ma più comodo, per equazioni la cui non linearità è debole.

Nonostante questa limitazione è stata possibile l'interpretazione di un gran numero di fenomeni non-lineari che erano noti da tempo, ma che non potevano essere spiegati mediante le teorie lineari.

Disgraziatamente non esiste tuttora nessun metodo analitico adatto allo studio dei fenomeni « fortemente non-lineari »; fenomeni che si presentano quotidianamente nelle applicazioni ad esempio nei circuiti cosiddetti di rilassamento, nei multivibratori, nei fenomeni di attrito meccanico, ecc. Solo in questi ultimi anni gli sforzi dei due matematici inglesi M. CARTWRIGHT e J. E. LITTLEWOOD sono orientati verso quel difficile problema.

È impossibile, nelle poche pagine che seguono, esporre in modo completo la meccanica non-lineare. La letteratura ora esistente supera già parecchie migliaia di pagine fra trattati, monografie, articoli originali, di cui un gran numero scritti in lingua russa. Perciò l'autore si scusa se presenta solo una piccola parte dell'immenso materiale già accumulato per merito dei fondatori di questo nuovo ramo della Fisica Matematica.

**2. Punti singolari e loro interpretazione fisica.** - I punti singolari di una equazione differenziale (e. d. per brevità) hanno importanza notevole nelle applicazioni. Poichè la loro teoria può trovarsi nei trattati su equazioni differenziali (1) ci limiteremo ad un breve riassunto in modo da richiamare alcune nozioni che ci saranno utili in seguito.

Dato un sistema di e. d. della forma

$$(2, 1) \quad \frac{dx}{dt} = P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

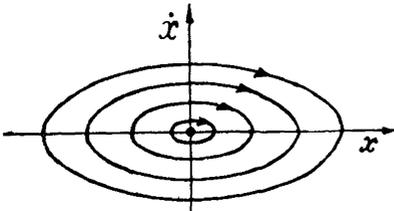
si chiama punto singolare un punto  $x_0, y_0$  tale che  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$ ; ogni altro punto che non goda di questa proprietà si chiama punto ordinario. Una e. d. del secondo ordine può essere ricondotta alla forma (2, 1) ponendo  $\dot{x} = y$ . Si dice spesso che il sistema di equazioni del primo ordine così ottenuto è un sistema equivalente (s. e.) all'equazione primitiva del secondo

ordine. Per esempio la e. d. dell'oscillatore armonico  $m\ddot{x} + c\dot{x} = 0$  scritta mediante il suo s. e. è :

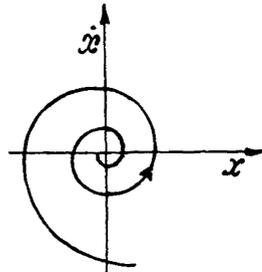
$$(2, 2) \quad \frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x; \quad \omega^2 = \frac{c}{m}.$$

In questo caso è punto singolare l'origine  $x=y=0$ . In un problema meccanico  $\frac{dx}{dt}$  è la velocità,  $\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$  l'accelerazione e si vede così che un punto singolare è anche punto di *equilibrio* proprietà questa valida in ogni caso.

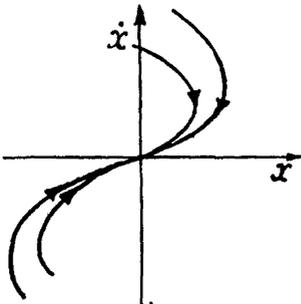
Secondo la terminologia di POINCARÉ i quattro punti singolari principali sono: il centro, il fuoco, il nodo e il colle. Il primo rappresenta sempre uno stato di equilibrio stabile, il secondo e il terzo possono rappresentare tanto stati di equilibrio stabile, quanto



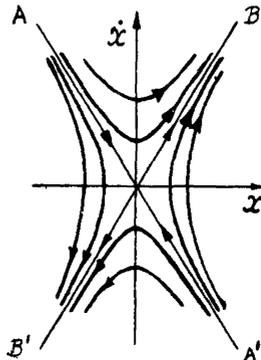
Centro.  
Fig. 1.



Fuoco stabile.  
Fig. 2.



Nodo stabile.  
Fig. 3.



Colle.  
Fig. 4.

di instabile, l'ultimo rappresenta sempre equilibrio instabile. Esempi di punti singolari di queste quattro specie sono dati dalle seguenti

e. d. ben note. La  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$  equivalente al sistema  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -\omega^2 x$  ha per punto singolare un centro. La  $\ddot{x} + 2hx + \omega^2 x = 0$  equivalente al sistema  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -2hy - \omega^2 x$  ha, nell'origine, un fuoco se  $h^2 < \omega^2$ , un nodo se  $h^2 > \omega^2$  fuoco e nodo stabile o instabile a seconda che  $h$  è positivo o negativo. Infine la  $\dot{x} - a^2 x = 0$  equivalente a  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = a^2 x$  ha per punto singolare un colle. In base alle ben note proprietà di queste e. d. si vede che il moto di un sistema nelle vicinanze di un centro è periodico non smorzato, mentre nelle vicinanze di un fuoco stabile, di un nodo, e di un colle è, rispettivamente, oscillatorio smorzato, aperiodico, instabile. Il comportamento delle curve integrali nelle vicinanze di un punto singolare si rappresenta generalmente nel piano delle variabili  $x, \dot{x}$ , detto *piano delle fasi*. Le figure da 1 a 4 mostrano la forma delle predette curve.

Nel caso di un centro nessuna curva integrale passa per il punto singolare; tutte le curve sono chiuse e lo circondano. Nel caso di un fuoco e di un nodo le curve penetrano in un punto singolare e precisamente il punto figurativo  $R$  che si muove su una di queste curve nella direzione prescritta dalle e. d., si avvicina indefinitivamente al punto singolare per  $t \rightarrow \infty$  (se il punto è stabile) per  $t \rightarrow -\infty$  (se è instabile). Nel caso di un fuoco il punto  $R$  si avvicina al punto singolare senza nessuna direzione determinata, perchè la spirale ruota infinite volte intorno ad esso. Nel caso di un nodo invece  $R$  si approssima al punto singolare in qualche direzione definita come dimostra la figura 3. Nel caso di un colle le curve integrali non passano, in generale, per il punto singolare, salvo le quattro curve integrali e singolari  $AO$ ,  $A'O$ ,  $OB$  e  $OB'$  dirette secondo gli assintoti delle curve integrali iperboliche. Su queste linee assintotiche il moto è pure assintotico.

Dato un sistema di e. d. lineari:

$$(2, 3) \quad \frac{dx}{dt} = ax + by; \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy$$

si dimostra (vedi bibliografia) che mediante la trasformazione di variabili  $\xi = \alpha x + \beta y$ ,  $\eta = \gamma x + \delta y$  si può ricondurre (2, 3) alla forma canonica:

$$(2, 4) \quad \frac{d\xi}{dt} = S_1 \xi; \quad \frac{d\eta}{dt} = S_2 \eta$$

purchè  $S_1$  ed  $S_2$  siano radici dell'equazione caratteristica:

$$(2, 5) \quad S^2 - (a + d)S + (ad - bc) = 0$$

e purchè  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$ . Nell'applicazione si incontra sempre il caso in cui  $S_1$  ed  $S_2$  sono radici distinte; i casi eccezionali studiati teoricamente (2) sono stati poco considerati nelle applicazioni.

La forma delle radici di (2, 5) indica la natura dei punti singolari in questione. Se  $S_1$  e  $S_2$  sono reali e dello stesso segno si ha un nodo (stabile se  $S_1 < 0$ ,  $S_2 < 0$ ) se di segno opposto si ha un colle. Se  $S_1$  e  $S_2$  sono complesse coniugate si ha un fuoco (stabile se  $R(S_1) < 0$ , instabile nel caso contrario). Infine se  $S_1$  e  $S_2$  sono immaginarie pure si ha un centro.

Dato poi un sistema di e. d. non lineari della forma:

$$(2, 6) \quad \frac{dx}{dt} = ax + by + P_2(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q_2(x, y)$$

dove  $P_2$  e  $Q_2$  sono polinomi di  $x$  e  $y$  che non contengono nè termini costanti, nè termini lineari, lo studio della stabilità si riconduce ai casi già considerati, come è stato dimostrato da LIAPOUNOFF (3).

Si può rendersi conto intuitivamente di ciò notando che le condizioni di equilibrio dipendono da quanto accade nelle vicinanze di un punto singolare sicchè, al limite, solo i termini *lineari* determinano la natura dell'equilibrio stesso.

**3. Cicli limiti di Poincaré.** - POINCARÉ ha provato (4) che le e. d. non lineari del tipo (2, 6) che si presentano nelle questioni di meccanica non-lineare possono avere, sotto certe condizioni, soluzioni periodiche che egli ha chiamato « cicli limiti ». Nel piano delle fasi queste soluzioni sono rappresentate da curve chiuse di cui ora preciseremo le proprietà.

Supponiamo esista una curva integrale chiusa  $C$  (nel piano delle fasi) e che esista un'altra curva non chiusa  $C'$  che goda



Fig. 5.

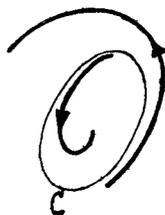


Fig. 6.

della seguente proprietà: quando  $t \rightarrow \infty$  oppure  $t \rightarrow -\infty$  il punto  $R$  che si muove su  $C'$  si approssimi a  $C$ . In altre parole preso un numero  $t_0$  arbitrario sia sempre possibile trovare un valore  $t_0$  tale che il punto  $x(t)$ ,  $y(t)$  su  $C'$  si trovi, per ogni  $t > t_0$

o per ogni  $t < t_0$ , ad una distanza  $d < \varepsilon$  da qualche punto di  $C$ . Dal punto di vista intuitivo ciò significa che  $C'$  è una spirale che si avvolge su una curva chiusa  $C$  o per  $t \rightarrow \infty$  o per  $t \rightarrow -\infty$  (fig. 5 e 6). Se esiste una curva integrale di questo tipo la chiameremo *ciclo limite*, che sarà stabile nel caso della fig. 5 instabile per quello della fig. 6. Si può indicare con facilità qualche esempio in cui è possibile provare rapidamente la esistenza di cicli limiti. Si consideri infatti il sistema di e. d. seguenti:

$$(3, 1) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} (1 - (x^2 + y^2)); \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} (1 - (x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

esso ammette una soluzione rappresentata da una curva chiusa tipo ciclo limite come si trova facilmente usando le coordinate polari e si dimostra che il ciclo limite è un cerchio di raggio uno con centro nell'origine, mentre le curve  $C'$  non chiuse sono spirali che si avvolgono su detto cerchio dall'interno e dall'esterno. Le spirali interne si svolgono dal centro del cerchio che ora si comporta come un fuoco instabile. In modo analogo si prova che il sistema:

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1); \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1)$$

ammette un ciclo instabile: il cerchio di raggio uno con centro nell'origine, che si comporta ora come un fuoco stabile.

Si vede facilmente che un ciclo limite e un punto singolare del suo interno, formano un insieme che descrive il moto del sistema da  $t = t_0$  a  $t = \infty$  per il ciclo stabile a  $t = t_0$  a  $t = -\infty$  per il ciclo instabile.

Se una curva integrale, con orientamento indicato della e. d. si considera come una linea di corrente, si ottiene una utile analogia che permette di rendersi conto delle relazioni che esistono fra i punti singolari e i cicli limiti del piano delle fasi. Da questo punto di vista gli elementi *instabili* dell'insieme ciclo limite punto singolare si comportano come sorgenti (meglio sorgenti positive) per queste linee di corrente, mentre gli elementi *stabili* agiscono come pozzi o sorgenti negative, in quanto, in questi elementi, spariscono quelle linee. Detta analogia permette di rendersi conto, intuitivamente, di una situazione più complicata, che si ha quando, come accade talvolta nelle applicazioni, esiste più di un ciclo

limite. Poichè gli elementi stabili e instabili si alternano si può ottenere una configurazione come da fig. 7: un punto singolare stabile  $S$  è circondato da un ciclo instabile (punteggiato in figura)  $C_1$ , a sua volta  $C_1$  è contenuto all'interno di un ciclo stabile  $C_2$ . Poichè l'ultimo elemento instabile è  $C_1$  da questo partono le curve integrali che si avvolgono su  $S$  e su  $C_2$ , punti e cicli stabili. Una configurazione di questo tipo si incontra nelle applicazioni a proposito della così detta auto-eccitazione dura (hard-self excitation). Un sistema di questo genere infatti non può eccitarsi spontaneamente,

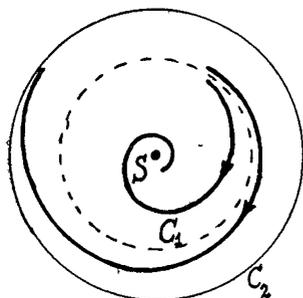


Fig. 7.

ma, sotto la influenza di un urto che porta le condizioni iniziali oltre il ciclo limite instabile, il sistema si può eccitare e raggiungere  $C_2$ , dove rimane permanentemente.

La differenza essenziale fra un movimento periodico di un sistema lineare (per esempio pendolo semplice) e il moto analogo del tipo « ciclo limite » sta che nel primo caso il moto è definito dalle condizioni iniziali, mentre nel secondo è indipendente da tali condizioni. Infatti qualunque siano le condizioni iniziali il moto sul ciclo limite è sempre identico.

Numerosissimi sono gli esempi di moti conformi a queste proprietà tipiche dei cicli limiti. I più studiati sono quelli relativi ai circuiti con tubi elettronici generatori di oscillazioni persistenti.

Altri esempi si hanno nelle oscillazioni parassite che spesso si innescano spontaneamente nei sistemi elettromeccanici di comando. Si può dire che, in generale, ogni qual volta si incontra una oscillazione « autoefficiente » posto il problema in equazione si riconduce sempre a un ciclo limite.

Disgraziatamente data una e. d. non lineare equivalente a un sistema del tipo (2, 8) è, in generale, impossibile stabilire l'esistenza di un ciclo limite in base alla forma della equazione stessa. Esistono tuttavia un certo numero di criteri indicati da POINCARÉ fondati sulla teoria degli indici (5) che però danno solamente le condizioni necessarie per l'esistenza di un ciclo limite. Esiste inoltre un teorema dovuto a BENDIXON (6) che dà una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del ciclo limite, ma la sua applicabilità è molto limitata.

**4. Metodi di approssimazione.** - Le difficoltà che si incontrano nella ricerca delle soluzioni periodiche mediante i metodi diretti

hanno indirizzato gli sforzi dei fisici verso lo sviluppo di metodi di *approssimazione* che permettono di risolvere il problema con il grado di precisione desiderato. Esistono tre metodi dovuti rispettivamente a POINCARÉ (7), VAN DER POL (8) e KRYLOFF BOGOLIUBOFF (9); il loro sviluppo storico ha seguito l'ordine ora indicato.

a) *Metodo di Poincaré.* - Invece di considerare le equazioni sotto la forma (2, 6) prendiamo in esame la seguente e. d.:

$$(4, 1) \quad \ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}).$$

È in questa forma che in generale si incontrano, nelle applicazioni, le e. d. non lineari. In questa equazione  $f(x, \dot{x})$  è una funzione non lineare delle variabili  $x$  e  $\dot{x}$ ,  $\mu$  un parametro che supporremo piccolissimo. Notiamo anzi che i metodi ora citati sono applicabili solo in questa ipotesi. È chiaro che se  $\mu = 0$ , (4, 1) rappresenta la e. d. di un oscillatore armonico ed ha una infinità di soluzioni periodiche dipendenti da due costanti arbitrarie. Nel piano delle fasi queste soluzioni sono rappresentate da una famiglia di cerchi avente l'origine come centro. L'origine è perciò un punto singolare del tipo *centro*. Possiamo scrivere le soluzioni sotto la forma generale  $x = x(t, k)$ ,  $y = \dot{x} = y(t, k)$  e in tal modo si indica che l'ampiezza  $k$  è un parametro delle curve integrali.

Nel caso  $\mu \neq 0$ , ma piccolo, le soluzioni, se esistono, saranno della forma  $x = x(t, \mu, k)$ ,  $y = y(t, \mu, k)$ . Si ha intanto una relazione fra i valori iniziali:

$$(4, 2) \quad x(0, \mu, k) = x(0, 0, k) + \beta_1; \quad y(0, \mu, k) = y(0, 0, k) + \beta_2$$

le quantità  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sono funzioni di  $\mu$  tali che  $\beta_1(0) = \beta_2(0) = 0$ .

Inoltre una delle  $\beta$  si può porre uguale a zero mediante una opportuna scelta dell'origine del tempo. Queste quantità  $\beta$  si considerano anch'esse come parametri, sicchè la forma generale delle soluzioni sarà:

$$x = x(t, \mu, \beta_1, \beta_2, k) \quad y = y(t, \mu, \beta_1, \beta_2, k);$$

uguagliando a zero una delle  $\beta$  (ad esempio  $\beta_1$  e posto  $\beta_2 = \beta$ ) la condizione di periodicità si scrive:

$$(4, 4) \quad \begin{aligned} x &= x(T + \tau, \mu, 0, \beta, k) - x(0, \mu, 0, \beta, k) = \Phi(\tau, \mu, \beta, k) = 0 \\ y &= y(T + \tau, \mu, 0, \beta, k) - y(0, \mu, 0, \beta, k) = \Psi(\tau, \mu, \beta, k) = 0 \end{aligned}$$

dove  $\tau$  è una correzione non lineare del periodo  $T = 2\pi$  del problema lineare ( $\mu = 0$ ). È evidente che  $\tau$  è una funzione di  $\mu$  tale che  $\tau(0) = 0$ .

Per separare le soluzioni periodiche del problema non-lineare da quelle del problema lineare, scriviamo le (4, 4) nella forma:

$$(4, 5) \quad \Phi(\tau, \mu, \beta, k) = \mu\Phi_1(\tau, \mu, \beta, k) = 0; \quad \psi(\tau, \mu, \beta, k) = \mu\psi_1(\tau, \mu, \beta, k) = 0.$$

Di conseguenza, se esistono soluzioni periodiche del problema non-lineare deve essere:

$$(4, 6) \quad \Phi_1(\tau, \mu, \beta, k) = 0; \quad \psi_1(\tau, \mu, \beta, k) = 0.$$

Le funzioni  $\tau(\mu)$ ,  $\beta(\mu)$  possono essere rappresentate da serie della forma:

$$(4, 7) \quad \tau(\mu) = m\mu + n\mu^2 + \dots; \quad \beta(\mu) = m_1\mu + n_1\mu^2 \dots$$

D'altra parte sviluppando  $\Phi_1$ ,  $\psi_1$  intorno al valore  $\Phi_{10}$ ,  $\psi_{10}$  da essi assunto quando  $\tau$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  sono nulli si ha:

$$(4, 8) \quad \Phi_1 = \Phi_{10} + a\mu + b\tau + c\beta \dots = 0; \quad \psi_1 = \psi_{10} + a_1\mu + b_1\tau + c_1\beta \dots = 0$$

sostituendo  $\tau$ ,  $\beta$  in (4, 8) mediante la loro espressione (4, 7) e tenendo conto solo dei termini del primo ordine in  $\mu$  si ha:

$$(4, 9) \quad \Phi_1 = \Phi_{10} + \mu(a + bm + cm_1) = 0; \quad \psi_1 = \psi_{10} + \mu(a_1 + b_1m + c_1m_1) = 0$$

queste due equazioni con due incognite  $m$  ed  $m_1$  indipendenti da  $\mu$  possono essere risolte se  $\Phi_{10} = \psi_{10} = 0$  e se  $\begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \neq 0$ .

Siccome  $b = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau}$  ecc. l'ultima condizione si può scrivere sotto la forma:  $|\partial(\Phi_1, \psi_1) / \partial(\tau, \beta)| \neq 0$ .

Se le predette condizioni sono soddisfatte esiste una soluzione periodica del primo ordine quando  $\mu \neq 0$  ma piccolo. Questo procedimento si generalizza per le approssimazioni di ordine superiore (7).

Il metodo di POINCARÉ consiste nel cercare di soddisfare (4, 1) mediante la serie;

$$(4, 10) \quad x = x_0(t) + A\beta_1 + B\beta_2 + C\mu + D\beta_1\mu + E\beta_2\mu + F\mu^2 \dots$$

dove  $x_0(t)$  è una funzione periodica soluzione di (4, 1) quando  $\mu = 0$  detta *soluzione generatrice*. I coefficienti della serie sono funzioni periodiche di  $t$ . Sostituendo in (4, 1) i valori di  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\ddot{x}$ , ricavati da (4, 10) e sviluppando  $f(x, \dot{x})$  in serie di TAYLOR nelle vicinanze delle soluzioni generatrici  $x_0$ ,  $x_0'$ , identificando i coefficienti di  $\mu$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_1\mu$  si ottiene un certo numero di e. d. A seconda che si cercano le soluzioni del primo ordine, del secondo ordine ecc. si prenderà un numero appropriato di termini della serie (4, 10).

Se l'approssimazione si limita al secondo ordine si ottengono sette e. q. di cui una sola identicamente soddisfatta, le altre sei sono:

$$(4, 11) \quad \begin{aligned} \ddot{A} + A = 0, \quad \ddot{B} + B = 0, \quad \ddot{C} + C = f(x_0, \dot{x}_0), \quad \ddot{D} + D = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 A + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{A} \\ \ddot{E} + E = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 B + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{B} \quad \ddot{F} + F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 C + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 \dot{C} \end{aligned}$$

dove  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$ ,  $\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0$  indicano le derivate parziali rispetto alle variabili indicate in cui poi a  $x$  e  $\dot{x}$  si sostituiscono  $x_0$ ,  $\dot{x}_0$ .

La forma della serie adoperata impone (affinchè  $x(0) = \beta_1$ ,  $\dot{x}(0) = y(0) = \beta_2$ )  $A(0) = 1$ ,  $\dot{B}(0) = 1$ , e nulli tutti gli altri valori iniziali. Si ha così:

$$A = \cos t, \quad B = \sin t.$$

Le altre quattro e. d. sono della forma  $\ddot{v} + v = V(t)$  con le condizioni iniziali  $v(0) = \dot{v}(0) = 0$ ; le loro soluzioni possono perciò scriversi:

$$v(t) = \int_0^t v(u) \sin(t-u) du.$$

Risolvendo successivamente il sistema delle (4, 11) si possono calcolare  $C(t)$ ,  $D(t)$  ecc.; poichè  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  devono essere periodiche di periodo  $2\pi + \tau$  e  $\tau$  è dell'ordine di  $\mu$  è facile vedere che  $C(2\pi)$  deve essere nulla mentre con calcoli lunghi ma semplici si ha  $\tau = \frac{\dot{C}(2\pi)}{k}$ .

Quindi:

$$(4, 13) \quad C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} f(k \cos u, -k \sin u) \sin u \, du = 0$$

$$(4, 14) \quad \tau = \frac{\dot{C}(2\pi)}{k} = \frac{\mu}{k} \int_0^{2\pi} f(k \cos u, -k \sin u) \cos u \, du.$$

E queste equazioni permettono il calcolo dell'ampiezza della soluzione generatrice e della correzione del periodo.

Ad esempio applichiamo questi risultati all'equazione di VAN DER POL

$$(4, 15) \quad \ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

equivalente alla (4, 1) purchè si ponga  $\mu(1 - x^2)\dot{x} = f(x, \dot{x})$ .

Essa ha come soluzione generatrice  $x_0 = k \cos t$ ,  $\dot{x}_0 = -k \sin t$ .

Di conseguenza si ha :

$$C(2\pi) = - \int_0^{2\pi} (1 - k^2 \cos^2 t) k \operatorname{sen}^2 t \, dt = - k\pi \left(1 - \frac{k^2}{4}\right) = 0$$

da cui  $k=0$  o  $k=2$ . Il primo valore corrisponde ovviamente ad una posizione di equilibrio, l'altra è, a meno di termini in  $\mu$  l'ampiezza della soluzione cercata. Per determinare il carattere dell'equilibrio si riduce, conforme al numero 2, le (4, 15), in cui omettano i termini non lineari, ad un sistema equivalente e procedendo coi metodi del paragrafo sopra citato si trova che l'equazione corrispondente a (2, 5) ha radici complesse coniugate con parte reale positiva, il punto d'equilibrio è perciò un fuoco instabile.

La (4, 14) dà per l'equazione di VAN DER POL  $\tau=0$  cioè in prima approssimazione è lo stesso come nel caso  $\mu=0$  di modo che la soluzione è, a meno di termini in  $\mu$ , della forma  $x=2 \cos t$ . Nel piano delle fasi il ciclo limite stabile soluzione di (4, 15) è rappresentato, in prima approssimazione, da un cerchio di raggio 2, il cui centro è un fuoco instabile.

Procedendo al calcolo delle approssimazioni successive sorgono delle armoniche ed una correzione per il periodo, ma i calcoli sono molto lunghi. Del resto il metodo di POINCARÉ è stato sviluppato con uno scopo completamente diverso da quella che ora ci interessa.

**5. Metodi di Van der Pol e di Kryloff-Bogoliuboff (K. B.)** - Questi due metodi sono basati sul procedimento ben noto della « variazioni delle costanti » (LAGRANGE). Nel metodo di VAN DER POL si prende la soluzione della forma :

$$(5, 1) \quad x = A \cos t + B \operatorname{sen} t,$$

con  $A$  e  $B$  variabili. Invece nel metodo di K. B. si utilizza per la soluzione la forma :

$$(5, 2) \quad x = a \operatorname{sen} (\omega t + \Phi)$$

dove  $a$  e  $\Phi$  sono funzioni del tempo sottoposte alla condizione  $\dot{x} = a\omega \cos (\omega t + \Phi)$  il che porta alla equazione :

$$(5, 3) \quad a \operatorname{sen} (\omega t + \Phi) + \dot{\Phi} a \cos (\omega t + \Phi) = 0.$$

Scritta la (4, 1) nella forma ( $\omega^2$  costante) :

$$(5, 4) \quad \ddot{x} + \omega^2 x + \mu f(x, \dot{x}) = 0$$

e sostituendo in essa  $x$  e  $\dot{x}$  e posto per brevità  $\omega t + \Phi = \gamma$  si ha:

$$(5, 5) \quad a\omega \cos \gamma - a\omega \dot{\Phi} \sin \gamma + \mu f(a \sin \gamma, a\omega \cos \gamma) = 0.$$

Risolvendo rispetto a  $\dot{a}$  e  $\dot{\Phi}$  il sistema formato dalle equazioni (5, 3) e (5, 5) si ha:

$$(5, 6) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\mu}{\omega} f(a \sin \gamma, a\omega \cos \gamma) \cos \gamma; \\ \dot{\Phi} &= \frac{\mu}{a\omega} f(a \sin \gamma, a\omega \cos \gamma) \sin \gamma. \end{aligned}$$

Da queste equazioni si vede che  $a$  e  $\dot{\Phi}$  sono piccole perciò le variazioni di  $a$  e  $\Phi$  sono in un periodo di tempo  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  molto piccole. Si potrà perciò, sempre durante questo periodo, ritenere a secondo membro delle (5, 6)  $a$  e  $\Phi$  costanti, e in particolare  $d\gamma = \omega dt$ .

Si avrà così integrando da  $t$  a  $t + T$  e dividendo poi per  $T$

$$\begin{aligned} \frac{a(t+T) - a(t)}{T} &= -\frac{\mu}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \sin \gamma, a\omega \cos \gamma) \cos \gamma d\gamma \\ \frac{\Phi(t+T) - \Phi(t)}{T} &= \frac{\mu}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \sin \gamma, a\omega \cos \gamma) \sin \gamma d\gamma. \end{aligned}$$

Se si studia il moto di un intervallo di tempo che contenga molti periodi si possono sostituire le equazioni precedenti alle differenze finite, con le seguenti e. d.

$$(5, 10) \quad \frac{da}{dt} = -\frac{\mu}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f(a \sin \gamma, a\omega \cos \gamma) \cos \gamma d\gamma = X(a)$$

$$(5, 11) \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega + \frac{\mu}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f(a \sin \gamma, a\omega \cos \gamma) \sin \gamma d\gamma = \omega + \Delta\omega = \Omega(a).$$

La variabile  $\gamma$  può essere considerata come la *fase totale*,  $\Omega(a)$  la frequenza non lineare e  $\Delta\omega$  la correzione non lineare della frequenza. L'ampiezza stazionaria è data da:

$$(5, 12) \quad X(a_n) = 0$$

si ritrovano così (ponendo  $\gamma = u + \frac{\pi}{2}$ ) gli stessi risultati ottenuti col metodo di POINCARÉ.

Per le approssimazioni di ordine superiore KEYLOFF e BOGOLIUBOFF impiegano il metodo ben noto di LINDSTED (10).

## PARTE SECONDA - APPLICAZIONI

Come esempio di applicazione dei metodi precedenti indichiamo la spiegazione di due fenomeni molto importanti: la sincronizzazione e la risonanza non lineare.

**6. Sincronizzazione.** - Si abbia un sistema meccanico o elettrico autoeccitato, non-lineare, oscillante su una frequenza  $\omega_0$ . Se agisce dall'esterno una forza di frequenza  $\omega_1$  si ha che il classico fenomeno della interferenza delle due frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_0$  non avviene conforme alla teoria lineare, ma si presenta nel seguente modo.

La frequenza dei battimenti  $\omega_1 - \omega_0$  non si annulla solo se  $\omega_1 = \omega_0$  ma anche quando  $\omega_1 - \omega_0$  non supera, in valore assoluto, un certo numero  $\Delta\omega$ .

Questo fenomeno si chiama sincronizzazione o anche trascinamento (entrainment) delle due frequenze.

VAN DER POL (11) ha studiato il fenomeno applicando alla griglia di un tubo elettronico auto-eccitato con frequenza  $\omega_0$  una forza elettromotrice esterna di frequenza  $\omega_1$ . Senza entrare in dettagli dello schema di VAN DER POL basta osservare che rappresentando approssimativamente la caratteristica di un tubo elettronico mediante un polinomio di terzo grado, si giunge ad una e. d. del tipo:

$$(6, 1) \quad \ddot{v} - \alpha\dot{v} + \gamma v^3 + \omega_0^2 v = B\omega_0^2 \sin \omega_1 t$$

dove  $v$  è una variabile proporzionale al voltaggio applicato alla griglia del tubo elettronico,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\omega_0^2$ ,  $B$  sono costanti che si esprimono in funzione dei parametri del circuito oscillante e del tubo.

VAN DER POL cerca la soluzione di questa equazione nella forma:

$$(6, 2) \quad v = b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \cos \omega_1 t.$$

Nel regime a due frequenze  $b_1$  e  $b_2$  sono funzioni di  $t$  che variano lentamente se  $\omega_0$  è vicino a  $\omega_1$ . Se avviene la sincronizzazione rimane una sola frequenza; in questo caso  $b_1$  e  $b_2$  divengono costanti.

Posto (6, 2) in (6, 1), se si trascurano le derivate seconde di  $b_1$  e  $b_2$  si ottiene un sistema di prima approssimazione del tipo:

$$(6, 3) \quad \dot{b}_1 = P(b_1, b_2) \quad \dot{b}_2 = Q(b_1, b_2)$$

cioè della forma (2, 1); applicando, come hanno fatto i russi ANDRONOW e WITT (12) le considerazioni indicate nel predetto paragrafo si trova che se  $\frac{2(\omega_0 - \omega_1)}{\alpha}$  è interno ad un intervallo  $(-a_1, a_1)$  ( $a_1$  è un numero stabilito mediante il calcolo), il sistema (6, 3) ha tre punti singolari di cui uno solo stabile, mentre se  $\frac{2(\omega_0 - \omega_1)}{\alpha}$  è esterno a questo intervallo, ha un solo punto singolare instabile. Nel primo caso  $b_1$  e  $b_2$  tendono ai valori assunti nel punto singolare stabile e perciò la soluzione di VAN DER POL si approssima ad una soluzione stazionaria con la sola frequenza  $\omega_1$ . Si ha così sincronizzazione e la condizione sopra esposta determina l'ampiezza della zona di sincronizzazione.

Nel secondo caso  $b_1$  e  $b_2$  variano su un ciclo limite, la cui esistenza si può provare col metodo di BENDIXON e sono così presenti ambedue le frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_0$ . Queste deduzioni teoriche sono state confermate da esperienze eseguite in U. R. S. S. dal 1930 al 1939.

7. La risonanza non lineare. - HELMHOLTZ (13) ha per primo osservato che in un sistema non lineare e sottoposto all'azione di frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$  oltre la frequenza dello spettro di FOURIER compaiono anche frequenze della forma  $\omega_c = m\omega_1 + n\omega_2$  in cui  $m$  e  $n$  sono numeri interi.

Le frequenze  $\omega_c$  si chiamano *toni di combinazione* (in inglese combination tones).

È facile rivelare queste frequenze applicando alla griglia di un tubo elettronico un voltaggio della forma  $v = v_1 + v_2 = v_0(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$ ; se la caratteristica non lineare del tubo si esprime mediante un polinomio di terzo grado è facile vedere che sostituendo il valore di  $v$  in questo polinomio, oltre alle frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e quelle dello spettro di FOURIER si presentano anche le seguenti frequenze di combinazione  $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$ ,  $2\omega_1 + \omega_2$ ,  $2\omega_1 - \omega_2$ ,  $2\omega_2 + \omega_1$ ,  $2\omega_2 - \omega_1$ .

Se un sistema elettrico non-lineare, autoeccitato compie oscillazioni libere con una frequenza  $\omega_1$  ed è sottoposto ad una forza elettromotrice esterna di frequenza  $\omega_2$  può aversi risonanza sui diversi valori di  $\omega_c$ . In particolare può aversi una risonanza su una frequenza  $n$  volte più piccola di  $\omega_2$  se  $\omega_1 = \frac{\omega_2}{n}$ . Siccome questi fenomeni sono, in generale, accompagnati dal fenomeno della sincronizzazione, esistono certe zone, in cui detta risonanza può essere osservata.

L. MANDELSTAM e N. PAPALEXI (14) partendo dalla teoria di

POINCARÉ hanno dato una teoria dei predetti fenomeni. Le loro conclusioni teoriche hanno trovato conferma sperimentale in una serie di ricerche su questo argomento (15).

Il punto di partenza di questi studi è l'e. d. della forma:

$$(7, 1) \quad \ddot{x} + x = \mu f(x, \dot{x}) + \lambda_0 \operatorname{sen} nt,$$

Con procedimento dettagliato (che qui omettiamo) si può dimostrare che un'equazione di questa forma si riconduce al funzionamento di un circuito elettronico autoeccitato in cui sulla griglia del tubo agisce oltre le reazioni interne, la forza elettromotrice  $\lambda_0 \operatorname{sen} nt$ . Se  $\mu = 0$  (7, 1) ha una infinità di soluzioni della forma:

$$x = a_0 \operatorname{sen} t - b_0 \cos t + \frac{\lambda_0}{1 - n^2} \operatorname{sen} nt.$$

Il metodo predetto consiste nel soddisfare (7, 1) quando  $\mu \neq 0$  con una variabile  $x$  della forma:

$$x = u(\mu) \operatorname{sen} t - v(\mu) \cos t + \frac{\lambda_0}{1 - n^2} \operatorname{sen} nt$$

e determinare  $u$  e  $v$  in modo che  $u \rightarrow a_0$ ,  $v \rightarrow b_0$  quando  $\mu \rightarrow 0$ . Se tale passaggio al limite è possibile diremo che (7, 1) possiede una *soluzione principale* che si identifica con la risonanza non-lineare. Tuttavia l'esistenza della soluzione principale non è che una *condizione necessaria* di questa teoria. Per poter affermare che tale soluzione rappresenta il fenomeno fisico della risonanza non lineare occorre che essa sia stabile. Il problema si scompone perciò in due parti: a) ricerca delle condizioni per cui esiste la soluzione principale, b) la stabilità di questa soluzione. Indichiamo la via seguita da MANDELSTAM e PAPALEXI per stabilire la parte a) delle loro ricerche, per b) riporteremo solo i risultati perchè lo studio completo ci porterebbe troppo lontano.

Si prova facilmente che, introducendo anzitutto una variabile ausiliaria

$$(7, 4) \quad z = x - \frac{\lambda_0}{1 - n^2} \operatorname{sen} nt$$

e poi due altre variabili  $u$  e  $v$  legate a  $z$  dalla relazione:

$$u = \dot{z} \cos t + z \operatorname{sen} t; \quad v = \dot{z} \operatorname{sen} t - z \cos t,$$

la (7, 1) viene sostituita dal sistema di equazione del primo ordine:

$$(7, 5) \quad \dot{u} = \mu \psi(u, v, t) \cos t; \quad \dot{v} = \mu \psi(u, v, t) \operatorname{sen} t$$

dove:

$$\begin{aligned} & \psi(u, v, t) = \\ & = f(u \operatorname{sen} t - v \operatorname{cos} t + \frac{\lambda_0}{1-n^2} \operatorname{sen} nt, u \operatorname{cos} t + v \operatorname{sen} t + \frac{n\lambda_0}{1-n^2} \operatorname{cos} nt). \end{aligned}$$

Notiamo che la variabile  $x$  è della forma (7, 3) grazie a questo cambiamento di variabili.

Integrando (7, 5) si ha:

$$(7, 6) \quad u = u_{t_0} + \mu \int_0^t \psi(u, v, t) \operatorname{cos} t dt \quad v = v_{t_0} + \mu \int_0^t \psi(u, v, t) \operatorname{sen} t dt;$$

siccome la soluzione non lineare (se esiste) deve restare nell'intorno della lineare ( $\mu = 0$ ) se  $\mu$  è piccolo si può scrivere: (vedi 4, 2)

$$u_0 = a_0 + \alpha(\mu) \quad v_0 = b_0 + \beta(\mu)$$

in cui  $\alpha(\mu)$ ,  $\beta(\mu)$  tendono allo zero per  $\mu \rightarrow 0$ .

Sviluppando la funzione  $\psi$  intorno ai valori  $a_0$ ,  $b_0$  e tenendo solo conto dei termini del primo ordine si ha:

$$(7, 7) \quad \psi(u, v, t) = \psi(a_0, b_0, t) + \alpha \left[ \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] + \beta \left[ \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] + \mu \left[ \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \mu} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \mu} \right] + \dots$$

dove le derivate parziali comprese entro parentesi quadra sono calcolate ponendo in luogo di  $u$  e  $v$ ,  $a_0$  e  $b_0$ .

D'altra parte utilizzando la serie di POINCARÉ si può scrivere:

$$(7, 8) \quad \begin{aligned} u &= a_0 + \alpha + \mu C_1(t) + \mu\alpha D_1(t) + \mu\beta E_1(t) + \mu^2 G_1(t) + \dots \\ v &= b_0 + \beta + \mu C_2(t) + \mu\alpha D_2(t) + \mu\beta E_2(t) + \mu^2 G_2(t) + \dots \end{aligned}$$

e confrontando (7, 8) con (7, 6) in cui sia posto (7, 7) si ha

$$(7, 9) \quad \begin{aligned} C_1(t) &= \int_0^t \psi(a_0, b_0, t) \operatorname{cos} t dt & C_2(t) &= \int_0^t \psi(a_0, b_0, t) \operatorname{sen} t dt \\ D_1(t) &= \int_0^t \left[ \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] \operatorname{cos} t dt & D_2(t) &= \int_0^t \left[ \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] \operatorname{sen} t dt \\ E_1(t) &= \int_0^t \left[ \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] \operatorname{cos} t dt & E_2(t) &= \int_0^t \left[ \frac{\partial \psi}{\partial v} \right] \operatorname{sen} t dt. \end{aligned}$$

Siccome si cercano soluzioni periodiche di periodo  $2\pi$ , si deve

porre  $u(2\pi) = u(0)$ ,  $v(2\pi) = v(0)$  il che porta alle condizioni:

$$\begin{aligned} C_1(2\pi) + \alpha D_1(2\pi) + \beta E_1(2\pi) + \mu G_1(2\pi) &= 0 \\ C_2(2\pi) + \alpha D_2(2\pi) + \beta E_2(2\pi) + \mu G_2(2\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Per determinare  $\alpha$  e  $\beta$  da queste due equazioni bisogna avere:

$$C_1(2\pi) = \int_0^{2\pi} \psi(\alpha_0, b_0, t) \cos t dt = 0 \quad C_2(2\pi) = \int_0^{2\pi} \psi(\alpha_0, b_0, t) \sin t dt = 0$$

e inoltre:

$$\begin{vmatrix} D_1(2\pi) & E_1(2\pi) \\ D_2(2\pi) & E_2(2\pi) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Per la seconda parte del problema — lo studio della stabilità — si scrivono l'equazioni alle variazioni ponendo  $u = u_0 + \xi$ ,  $v = v_0 + \eta$ , trovando così il sistema

$$(7, 13) \quad \frac{d\xi}{dt} = (\mu\psi_u \cos t)\xi + (\mu\psi_v \cos t)\eta; \quad \frac{d\eta}{dt} = (\mu\psi_u \sin t)\xi + (\mu\psi_v \sin t)\eta.$$

Si applica a questo sistema di e. d. il procedimento classico (16) che non riporteremo e con cui si ottengono le condizioni di stabilità.

Applicando le formule precedenti al caso di un circuito in cui  $f(x, \dot{x})$  può ritenersi uguale ad un polinomio di secondo grado in  $x$  moltiplicato per  $\dot{x}$  e supponendo  $n=2$  dopo lunghi calcoli si giunge alle seguenti conclusioni. La risonanza non lineare a frequenza metà della forza elettromotrice impressa può aversi solo per valori di  $\frac{\omega_2}{2}$  nell'intorno della frequenza  $\omega_1$  delle oscillazioni libere del circuito, (intorno di cui si può calcolare l'ampiezza) e per valori non troppo elevati della forza elettromotrice, risultato questo paradossale dal punto di vista della meccanica lineare.

#### BIBLIOGRAFIA

- (1) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Cap. IX.
- (2) F. TRICOMI, *Equazioni differenziali*, p. 88; M. FROMMER, « *Math. Annalen* », 109 (1934), 345-434.
- (3) M. A. LIAPOUNOFF, « *Ann. de la faculté des Sciences de Toulouse* », 9 (1907), 203-469; S. LEFSCHETZ, *Lectures on differential Equations*, « *Princ. Un. Press.* », 1946.
- (4) H. POINCARÉ, *Sur les Courbes définies par une Equation différentielle*, « *Journal des Mathématiques* » (3), (1881). 8 (1882); *Oeuvres*, Gauthier Villars, Paris, (1928), 1.222.
- (5) H. POINCARÉ, voir (4).
- (6) I. BENDIXSON, « *Acta Math.* », 24 (1901), 1-88.

- (7) H. POINCARÉ, *Les Methodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gauthier Villars, Paris, (1892), Vol. I, 79-232.
- (8) B. VAN DER POL, « Phil. Mag. », 7, (1926), 978-992, Radio Reviews, (1920), 701; vedi anche A. ANDRONOW et S. CHAIKIN, *Theory of Oscillation*, « Princ. Un. Press. », (1949), N. MINORSKY, *Introduction to Non linear Mechanics*, Edwards Bros, (1947).
- (9) N. KRYLOFF et N. BOGOLIUBOFF, *Introduction à la mécanique non linéaire*, Kieff, (1937), aussi N. MINORSKY, loc. cit. Cap. X.
- (10) A. LINDSTEDT, « Mem. Ac. Sc. de St. Petersbourg », 31 (1883), 1-20, aussi (3) et N. MINORSKY, loc. cit. Cap. XI.
- (11) B. VAN DER POL, « Phil. Mag », (7) 3, (1927), 65-80.
- (12) A. ANDRONOW et A. WITT, « Archiv. fur Electrotechnik », 24 (1930).
- (13) H. HELMHOLTZ, *Sensations of tone*, Longmans, Green and C., London, (1895).
- (14) L. MANDELSTAM et N. PAPALEXI, « Zeitschrift fur Physik », 73 (1932).
- (15) Vedi la bibliografia nell'articolo di MANDELSTAM et PAPALEXI, *Exposé de recherches récentes etc.*, « Journal of Technical Physic. », U. S. S. R., (1934).
- (16) A. POINCARÉ, voir (7), Cap. III, IV, aussi : G. SANSONE, (1), Cap. VII, N. MINORSKY, loc. cit. p. 328.

NOTA. - La bibliografia qui riportata non è completa e si riferisce solo a qualche pubblicazione fra le più importanti. Per una bibliografia più completa (fino al 1937 circa) vedi N. MINORSKY, loc. cit. e anche l'articolo d. T. H. von KÄRMAN, « Boll. Am. Math. Society », 46 (1940). 615-683 Per la bibliografia più recente vedi « Mathematical Reviews », Brown University U. S. A.