Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Gatteschi

Sull'approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi sferici ed ultrasferici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 305–313.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_305_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Sull' approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi sferici ed ultrasferici.

Nota di LUIGI GATTESCHI (a Firenze).

Sunto. - *Di una formula per l'approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi sferici ed ultrasferici proposta da* F. TRICOMI *si precisa l'errore.*

1. Abbiamo recentemente stabilito (¹), usando un procedimento generale di F. TRICOMI (²), la seguente formula asintotica per l'r-esimo zero Θ_r del polinomio ultrasferico $P_n^{(\lambda)}(\cos \vartheta)$, $(0 < \lambda < 1)$,

$$\Theta_r = \vartheta_r + \frac{\lambda(1-\lambda)(n+\lambda+3)}{2(n+\lambda)(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)} \operatorname{cotg} \vartheta_r + \rho(n, \lambda),$$

$$\vartheta_r = \frac{2r+\lambda-1}{2(n+\lambda)} \pi,$$

$$(*) \qquad |\rho(n, \lambda)| < \frac{23{,}7 + 8{,}7C(\lambda, 9)}{2^4(n+\lambda)^4},$$

(¹) L. GATTESCHI, *Approssimazione asintotica degli zeri dei polinomi ultrasferici*, « Rend. Mat. e Appl. Roma », (5), 8, (1949), pp. 399-411.

(²) F. TRICOMI, *Sugli zeri delle funzioni di cui si conosce una rappresentazione asintotica*, « Ann. Mat. Pura Appl. », (4), 26, (1948), pp. 284-300.

dove

$$C(\lambda, m) = \begin{cases} \left(\operatorname{tg}\frac{1-\lambda}{2}\pi\right)^m & \text{per} \quad 0 < \lambda < \frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg}\frac{1-\lambda}{2}\pi & \text{per} \quad \frac{1}{2} \leq \lambda < 1. \end{cases} \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

Per la validità della limitazione data per $\rho(n, \lambda)$, oltre alle condizioni

$$\left[\frac{n - 2\lambda + 3}{6}\right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right], \qquad n \geq 10,$$

devono essere soddisfatte per l'indice n altre tre disuguaglianze, ma F. TRICOMI (³) ha fatto osservare che queste ultime condizioni possono notevolmente semplificarsi e, anzi, due di esse si fondono in una sola risultando così che per la validità della (*) basta che

$$\left[\frac{n - 2\lambda + 3}{6}\right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right], \qquad n > n_0(\lambda),$$

essendo $n_0(\lambda)$ il più grande dei tre numeri

$$10, \qquad A + \frac{1}{2} - \lambda, \qquad B^* - \lambda$$

dove

$$A = \operatorname{Max} \cdot \left(\frac{28{,}6 + 65{,}7C(\lambda, 9)}{27\lambda(1-\lambda)\pi}, \frac{75}{2^4\lambda(1-\lambda)\pi}\right),$$

$$B^* = \frac{\sqrt{3} + C(\lambda, 1)}{8(1+\lambda)\pi} + \left\{\left(\frac{\sqrt{3} + C(\lambda, 2)}{8(1+\lambda)\pi}\right)^2 + \frac{9\sqrt{3} + (11 + \sqrt{3})C(\lambda, 3)}{32(1+\lambda)\pi}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nella presente nota viene presa in esame, per suggerimento dello stesso prof. TRICOMI, che qui pubblicamente ringraziamo, la formula asintotica semplificata

$$\Theta_r = \vartheta_r + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2n^2}\left(1 - \frac{2\lambda}{n}\right)\operatorname{cotg}\vartheta_r + \rho(n, \lambda),$$

contenuta nel suo sopracitato lavoro, e viene provato che, assoggettando r ed n alle due uniche condizioni

$$\left[\frac{n - 2\lambda + 3}{6}\right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right], \qquad n \geq 10,$$

è

$$|\rho(n, \lambda)| < \frac{158\lambda(1-\lambda)}{(2n)^4},$$

così i precedenti risultati vengono notevolmente migliorati.

(³) F. TRICOMI, *Sugli zeri dei polinomi sferici ed ultrasferici*, in corso di stampa negli « Ann. Mat. Pura Appl. ».

2. Prendendo come valore approssimato di $P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta)$ la somma dei primi tre termini della formula di approssimazione asintotica generalizzata di STIELTJES [4], si ottiene

$$P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta)=\frac{2}{\pi}\frac{\operatorname{sen}\lambda\pi}{(2\operatorname{sen}\vartheta)^{\lambda}}\frac{\Gamma(n+2\lambda)\cdot\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)}f_n^{(\lambda)}(\vartheta),$$

con

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f_n^{(\lambda)}(\vartheta)&=\cos\left\{(n+\lambda)\vartheta-\frac{\lambda}{2}\pi\right\}+\frac{\lambda(1-\lambda)}{n+\lambda+1}\,\frac{\cos\left\{(n+\lambda+1)\vartheta-(\lambda+1)\frac{\pi}{2}\right\}}{2\operatorname{sen}\vartheta}+\\ &+\frac{(\lambda+1)\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)}{2(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}\,\frac{\cos\left\{(n+\lambda+2)\vartheta-(\lambda+2)\frac{\pi}{2}\right\}}{(2\operatorname{sen}\vartheta)^2}+R_3(\vartheta),\end{aligned}\right.$$

$$(1')\qquad |R_3(\vartheta)|<\frac{(\lambda+2)(\lambda+1)\lambda(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)}{3(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)(n+\lambda+3)}\,\frac{1}{(2\operatorname{sen}\vartheta)^3}.$$

$$0<\lambda<1,\qquad 0<\vartheta<\pi.$$

La (1) può scriversi

$$(2)\quad f_n^{(\lambda)}(\vartheta)=\left[1+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}-\frac{a_2}{4}\operatorname{cotg}^2\vartheta\right]\cos\left\{(n+\lambda)\vartheta-\lambda\frac{\pi}{2}\right\}+$$
$$+\frac{a_1+a_2}{2}\operatorname{cotg}\vartheta\operatorname{sen}\left\{(n+\lambda)\vartheta-\lambda\frac{\pi}{2}\right\}+R_3(\vartheta),$$

dove

$$(2')\qquad a_1=\frac{\lambda(1-\lambda)}{n+\lambda+1},\qquad a_2=\frac{(\lambda+1)\lambda(2-\lambda)(1-\lambda)}{2(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)}.$$

Indicando con

$$\vartheta_r=\frac{2r+\lambda-1}{2(n+\lambda)}\pi,\qquad r=1,2,\dots,n,$$

gli zeri di $\cos\{(n+\lambda)\vartheta-\lambda\pi/2\}$ si ha, per l'r-esimo zero Θ_r di $P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta)$,

$$(3)\qquad \Theta_r=\vartheta_r+\varphi_r$$

con

$$(4)\qquad \varphi_r=\frac{\lambda(1-\lambda)}{2n^2}\left(1+\eta-\frac{2\lambda}{n}\right)\operatorname{cotg}\vartheta_r,$$

e ci proponiamo di stabilire una prima limitazione per φ_r.

Si ha

$$\operatorname{cotg}\Theta_r=\operatorname{cotg}\vartheta_r-\frac{\varphi_r}{\operatorname{sen}^2\xi_r},\qquad \vartheta_r<\xi_r<\vartheta_r+\varphi_r,$$

[4] G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Soc. Coll. Publ. », XXIII, New York, 1939, p. 191.

$$\cos\left\{(n+\lambda)\Theta_r-\frac{\lambda}{2}\pi\right\}=(-1)^r\operatorname{sen}(n+\lambda)\varphi_r=(-1)^r\left[(n+\lambda)\varphi_r-\frac{(n+\lambda)^3\varphi_r^3}{3!}\cos\xi\right],$$
$$0<\xi<(n+\lambda)\varphi_r,$$
$$\operatorname{sen}\left\{(n+\lambda)\Theta_r-\frac{\lambda}{2}\pi\right\}=(-1)^{r+1}\cos(n+\lambda)\varphi_r,$$

e la (2) può allora scriversi

$$(-1)^r f_n^{(\lambda)}(\Theta_r)=\left[1+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}-\frac{a_2}{4}\operatorname{cotg}^2\Theta_r\right](n+\lambda)\varphi_r\left[1-\frac{(n+\lambda)^2\varphi_r^2}{3!}\cos\xi\right]-$$
$$-\left(\operatorname{cotg}\vartheta_r-\frac{\operatorname{sen}^2\xi_r}{2}\right)\cos(n+\lambda)\varphi_r+(-1)^r R_3(\Theta_r)=0,$$

ossia

$$\text{(5)}\quad \varphi_r\left\{(n+\lambda)\left[1+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}-\frac{a_2}{4}\operatorname{cotg}^2\Theta_r\right]\cdot\left[1-\frac{(n+\lambda)^2\varphi_r^2}{3!}\cos\xi\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{a_1+a_2}{2\operatorname{sen}^2\xi_r}\cos(n+\lambda)\varphi_r\right\}=\frac{a_1+a_2}{2}\operatorname{cotg}\vartheta_r\cos(n+\lambda)\varphi_r-(-1)^r R_3(\Theta_r).$$

Valgono per lo zero Θ_r di $P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta)$ le limitazioni [5]

$$\vartheta_r<\Theta_r<\vartheta_r+\frac{1-\lambda}{2(n+\lambda)}\pi,\qquad r=1,\,2,\,\ldots,\,\left[\frac{n}{2}\right],$$

si ha quindi

$$0<\varphi_r<\frac{1-\lambda}{2(n+\lambda)}\pi,$$

da cui

$$\text{(6)}\qquad 1-\frac{(n+\lambda)^2\varphi_r^2}{3!}\cos\xi>1-\frac{(1-\lambda)^2\pi^2}{24}>1-\frac{\pi^2}{24}.$$

Se inoltre r è tale che

$$\text{(7)}\qquad \left[\frac{n-2\lambda+3}{6}\right]+1\leq r\leq\left[\frac{n}{2}\right],$$

quando $\vartheta_r\leq\vartheta\leq\vartheta_r+(1-\lambda)\pi/2(n+\lambda)$ si hanno per $\operatorname{sen}\vartheta$ e $\operatorname{cotg}\vartheta$ e quindi anche per $\operatorname{sen}\Theta_r$ e $\operatorname{cotg}\Theta_r$ le limitazioni

$$\operatorname{sen}\vartheta>\frac{1}{2},\qquad 0<\operatorname{cotg}\vartheta<\sqrt{3},$$

dall'ultima delle quali segue

$$\text{(8)}\qquad 1+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}-\frac{a_2}{4}\operatorname{cotg}^2\Theta_r>1+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}-\frac{3}{4}a_2>1.$$

Tenendo presente che è

$$0<(n+\lambda)\varphi_r<(1-\lambda)\frac{\pi}{2}$$

[5] Loc. cit. [1], p. 408.

si ha

$$\frac{a_1 + a_2}{2\,\mathrm{sen}^2 \xi_r} \cos (n + \lambda)\varphi_r > 0, \tag{9}$$

ed ancora

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \operatorname{cotg} \vartheta_r \cos (n + \lambda)\varphi_r < \frac{\lambda(1-\lambda)}{2(n+\lambda+1)}\left[1 + \frac{(\lambda+1)(2-\lambda)}{2(n+\lambda+2)}\right] \operatorname{cotg} \vartheta_r . \tag{10}$$

Essendo poi per la (1')

$$|\,R_3(\Theta_r)\,| < \frac{\lambda(1-\lambda)}{n+\lambda+1}\,\frac{(\lambda-2)(\lambda+1)(3-\lambda)(2-\lambda)}{3(n+\lambda+2)(n+\lambda+3)},$$

si ha dalla (5) per le (6), (8), (9), (10)

$$0 < \varphi_r < \frac{\lambda(1-\lambda)}{2(n+\lambda)(n+\lambda+1)}\left[\sqrt{3} + \frac{(\lambda+1)(2-\lambda)\sqrt{3}}{2(n+\lambda+2)} + \right.$$
$$\left. + \frac{2(\lambda+2)(\lambda+1)(3-\lambda)(2-\lambda)}{3(n+\lambda+2)(n+\lambda+3)}\right]\left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right)^{-1},$$

ed osservando che è

$$(\lambda+1)(2-\lambda) < \frac{9}{4}, \qquad (\lambda+2)(3-\lambda) < \frac{25}{4},$$

la precedente disuguaglianza può scriversi, per $n \geq 10$,

$$0 < \varphi_r < \frac{\lambda(1-\lambda)}{2(n+\lambda)(n+\lambda+1)}\left[\sqrt{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{9\sqrt{3}}{8(n+2)} + \frac{225}{24(n+2)(n+3)}\right]\left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right)^{-1} <$$
$$< \frac{\lambda(1-\lambda)}{2(n+\lambda)(n+\lambda+1)}\left[\sqrt{3} + \frac{9\sqrt{3}}{8\cdot 12} + \frac{224}{24\cdot 12\cdot 13}\right]\left(1 - \frac{\pi^2}{24}\right)^{-1},$$

ossia

$$0 < \varphi_r < \frac{13{,}4}{8}\,\frac{\lambda(1-\lambda)}{(n+\lambda)(n+\lambda+1)}, \qquad n \geq 10. \tag{11}$$

3. Riprendiamo ora la (2) che potremo scrivere

$$\left\{\begin{aligned} &(-1)^r f_n^{(\lambda)}(\Theta_r) = \\ &= \left[1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} - \frac{a_2}{4}\left(\operatorname{cotg}^2 \vartheta_r - \frac{2\varphi_r \operatorname{cotg} \vartheta_r}{\mathrm{sen}^2 \vartheta_r} + \varepsilon_2\right)\right](n+\lambda)(\varphi_r + \varepsilon_3) - \\ &- \frac{a_1 + a_2}{2}\left(\operatorname{cotg} \vartheta_r - \frac{\varphi_r}{\mathrm{sen}^2 \vartheta_r} + \varepsilon_1\right)\left[1 - \frac{(n+\lambda)^2 \varphi_r^2}{2\,!} + \varepsilon_4\right] + (-1)^r R_3(\Theta_r) = 0 \end{aligned}\right. \tag{12}$$

dove

$$(13)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \varphi_r^2 \dfrac{\cos \xi_r}{\operatorname{sen}^3 \xi_r}, \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\varphi_r^2}{\operatorname{sen}^4 \vartheta_r} + \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1 \operatorname{cotg} \vartheta_r - 2\varepsilon_2 \dfrac{\varphi_r}{\operatorname{sen}^2 \vartheta_r}, \\ \varepsilon_3 = -\dfrac{(n+\lambda)^2\varphi_r^3}{3\,!} \cos \xi, \qquad \varepsilon_4 = \dfrac{(n+\lambda)^4\varphi_r^4}{4\,!} \cos \xi', \end{cases}$$

$$\vartheta_r < \xi_r < \vartheta_r + \varphi_r \qquad 0 < \xi,\ \xi' < (n+\lambda)\varphi_r .$$

Se poniamo ulteriormente

$$(14)\qquad \varepsilon_5 = \frac{a_2}{2}\varphi_r\left(\varphi_r \frac{\operatorname{cotg}\vartheta_r}{\operatorname{sen}^2\vartheta_r} - \frac{\varepsilon_2}{2}\right) +$$

$$+ \left[1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4}\left(1 - \operatorname{cotg}^2\vartheta_r + 2\varphi_r \frac{\operatorname{cotg}\vartheta_r}{\operatorname{sen}^2\vartheta_r} - \varepsilon_2\right)\right]\varepsilon_3 +$$

$$+ \frac{a_1+a_2}{2(n+\lambda)}\left\{\left[\frac{(n+\lambda)^2}{2\,!}\varphi_r^2 - \varepsilon_4\right]\left(\operatorname{cotg}\vartheta_r - \frac{\varphi_r}{\operatorname{sen}^2\vartheta_r} + \varepsilon_1\right) - \varepsilon_1\right\} + (-1)^r \frac{R_3(\Theta_r)}{n+\lambda},$$

la (12) diviene

$$\left[1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} - \frac{a_2}{4}\operatorname{cotg}^2\vartheta_r + \frac{a_1+a_2}{2(n+\lambda)\operatorname{sen}^2\vartheta_r}\right]\varphi_r - \frac{a_1+a_2}{2(n+\lambda)}\operatorname{cotg}\vartheta_r + \varepsilon_5 = 0,$$

e per la (4) e le (2′)

$$(12')\qquad A\eta + \varepsilon_6 + 1 - \frac{2\lambda}{n} + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2(n+\lambda+1)} - \frac{n^2}{(n+\lambda)(n+\lambda+1)} -$$

$$- \frac{(\lambda+1)(2-\lambda)n^2}{2(n+\lambda)(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)} = 0,$$

con

$$(15)\qquad A = 1 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} - \frac{a_2}{4}\operatorname{cotg}^2\vartheta_r + \frac{a_1+a_2}{2(n+\lambda)\operatorname{sen}^2\vartheta_r},$$

$$(16)\qquad \varepsilon_6 = \left[\frac{a_2}{4} - \frac{a_2}{4}\operatorname{cotg}^2\vartheta_r + \frac{a_1+a_2}{2(n+\lambda)\operatorname{sen}^2\vartheta_r}\right]\left(1 - \frac{2\lambda}{n}\right) - \frac{\lambda}{n}a_1 +$$

$$+ \frac{2\varepsilon_5 n^2}{\lambda(1-\lambda)\operatorname{cotg}\vartheta_r} = 0.$$

La (12′) può essere così scritta

$$A\eta + \varepsilon_6 + 1 - \frac{2\lambda}{n} + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2n}\left(1 - \frac{\lambda+1}{n+\lambda+1}\right) -$$

$$- \left(1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda^2}{n(n+\lambda)}\right)\left(1 - \frac{\lambda+1}{n} + \frac{(\lambda+1)^2}{n(n+\lambda+1)}\right) -$$

$$- \frac{(\lambda+1)(2-\lambda)}{2n}\left(1 - \frac{\lambda}{n+\lambda}\right)\left(1 - \frac{\lambda+1}{n+\lambda+1}\right)\left(1 - \frac{\lambda+2}{n+\lambda+2}\right) = 0$$

o meglio, ponendo

(17) $$\varepsilon_7 = \delta_1 - \delta_2$$

con

$$(17_1)\quad \delta_1 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{2n(n+\lambda)} + \frac{(\lambda+1)(2-\lambda)(\lambda+2)}{2n(n+\lambda+2)} + \frac{\lambda(\lambda+1)^2}{n^2(n+\lambda+1)} + \\ + \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{n^2(n+\lambda)} + \frac{(\lambda+1)^2\lambda(2-\lambda)(\lambda+2)}{2n(n+\lambda)(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)},$$

$$(17_2)\quad \delta_2 = \frac{\lambda(\lambda+1)}{n^2} + \frac{\lambda(\lambda+1)^2}{2n(n+\lambda+1)} + \frac{(\lambda+1)^2\lambda(2-\lambda)}{2n(n+\lambda)(n+\lambda+1)} + \\ + \frac{(\lambda+1)^2(2-\lambda)(\lambda+2)}{2n(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)} + \frac{\lambda(\lambda+1)(2-\lambda)(\lambda+2)}{2n(n+\lambda)(n+\lambda+2)} + \frac{\lambda^2(\lambda+1)^2}{n^2(n+\lambda)(n+\lambda+1)},$$

otteniamo

$$A\eta + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2n} - \frac{2\lambda}{n} + \frac{\lambda+1}{n} + \frac{\lambda}{n} - \frac{(\lambda+1)(2-\lambda)}{2n} = 0,$$

ossia

(18) $$A\eta + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 = 0.$$

4. Passiamo ora alle limitazioni delle $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7$. Dalla prima delle (13) si ha

$$0 < \varepsilon_1 < 4\sqrt{3}\,\varphi_r^2.$$

Essendo

$$\frac{2\varepsilon_1\varphi_r}{\operatorname{sen}^2\vartheta_r} > 0,$$

e

$$\frac{\varphi_r^2}{\operatorname{sen}^4\vartheta_r} - 2\varepsilon_1\frac{\varphi_r}{\operatorname{sen}^2\vartheta_r} > \frac{\varphi_r^2}{\operatorname{sen}^4\vartheta_r} - \frac{8\sqrt{3}\,\varphi_r^3}{\operatorname{sen}^2\vartheta_r} > \frac{\varphi_r^2}{\operatorname{sen}^4\vartheta_r}\left(1 - 8\sqrt{3}\,\frac{13{,}4}{8\cdot 10\cdot 11\cdot 4}\right) > 0,$$

si ha per la seconda delle (13),

$$0 < \varepsilon_2 < \frac{\varphi_r^2}{\operatorname{sen}^4\vartheta_r} + \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_1\operatorname{cotg}\vartheta_r < \varphi_r^2(40 + 3\cdot 16\varphi_r^2),$$

ossia

$$0 < \varepsilon_2 < 41\varphi_r^2.$$

In modo analogo si hanno per ε_3 e ε_4 le limitazioni

$$0 < -\varepsilon_3 < \frac{13{,}4}{3\cdot 2^6}\varphi_r^2,$$

$$0 < \varepsilon_4 < \frac{(13{,}4)^2}{3\cdot 2^{13}}\varphi_r^2.$$

Tenendo presenti le limitazioni sopra trovate per $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ ed osservando che è

$$0 < a_1 < \frac{1}{4(n+\lambda+1)}, \qquad 0 < a_2 < \frac{9}{16\cdot 2(n+\lambda+1)(n+\lambda+2)},$$

si ha dalla (14)

$$|\varepsilon_5| < \frac{77{,}7\lambda(1-\lambda)}{2^4 n^4}$$

e da questa per la (16)

$$|\varepsilon_6| < \frac{1}{2^3 n^2}\left(\frac{69}{2^3} + \frac{77{,}7}{\operatorname{cotg}\vartheta_r}\right).$$

Dalle (17_1) e (17_2) con facile calcolo si ha

$$0 < \delta_1 < \frac{1}{n^2}\frac{7242}{5\cdot 11\cdot 32}, \qquad 0 < \delta_2 < \frac{1}{n^2}\frac{8249}{5\cdot 11\cdot 32},$$

quindi per la (17)

$$|\varepsilon_7| < \frac{1}{n^2}\frac{8249}{5\cdot 11\cdot 32},$$

ossia

$$|\varepsilon_7| < \frac{1}{8n^2}\,37{,}5.$$

Osservando ora che per la (15) è

$$A > 1$$

si ha dalla (18)

$$|\eta| < |\varepsilon_6| + |\varepsilon_7| < \frac{1}{8n^2}\left(\frac{69}{8} + \frac{77{,}7}{\operatorname{cotg}\vartheta_r} + 37{,}5\right),$$

quindi

$$(19) \qquad |\eta| < \frac{1}{8n^2}\left(46{,}2 + \frac{77{,}7}{\operatorname{cotg}\vartheta_r}\right),$$

e da questa, posto

$$\rho(n,\lambda) = \eta\,\frac{\lambda(1-\lambda)}{2n^2}\operatorname{cotg}\vartheta_r\,,$$

segue

$$|\rho(n,\lambda)| < \frac{\lambda(1-\lambda)}{16n^4}(46{,}2\sqrt{3} + 77{,}7),$$

cioè

$$|\rho(n,\lambda)| < \frac{158\lambda(1-\lambda)}{(2n)^4}.$$

Abbiamo dunque che *se sono soddisfatte le seguenti condizioni*

$$\left[\frac{n-2\lambda+3}{6}\right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right], \qquad n \geq 10,$$

vale allora per l'r-esimo zero Θ_r *di* $P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta)$ *la formula*

$$(20) \qquad \boxed{\Theta_r = \vartheta_r + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2n^2}\left(1 - \frac{2\lambda}{n}\right)\operatorname{cotg}\vartheta_r + \rho(n,\lambda)}\,, \quad \vartheta_r = \frac{2r+\lambda-1}{2(n+\lambda)}\pi,$$

con

$$(21) \qquad \boxed{|\rho(n,\lambda)| < \frac{158\lambda(1-\lambda)}{(2n)^4}}\,,$$

5. Nel caso dei polinomi $P_n(x)$ di LEGENDRE ($\lambda = 1/2$, $\cos \vartheta = x$), posto

$$\cos \Theta_r = \xi_r , \qquad \cos \vartheta_r = x_r ,$$

e valutando il secondo membro della (20) con la formula di TAYLOR arrestata alla derivata seconda, otteniamo la formula di TRICOMI

$$\boxed{\xi_r = \left[1 - \frac{1}{8n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] x_r + \varepsilon} \tag{20'}$$

$$x_r = \cos \frac{4r - 1}{4n + 2}\pi, \qquad \left[\frac{n+2}{6}\right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2}\right] \qquad n \geq 10 \ (^6);$$

in questa, per le cose prima dette, si ha per ε la limitazione

$$\boxed{|\varepsilon| < \frac{5}{2n^4}} \tag{21'}$$