Bollettino
Unione Matematica Italiana

Carlo Pucci

Derivazione per serie di funzioni a variazione limitata

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 281–286.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_281_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Derivazione per serie di funzioni a variazione limitata.

Nota di CARLO PUCCI (a Firenze).

Sunto. - *Si dà una generalizzazione di un teorema di derivazione per serie di* FUBINI (1) *e successivamente si perviene a un teorema di convergenza quasi ovunque, nel senso specificato in questa nota, delle rette tangenti a una successione di curve piane rettificabili sotto forma esplicita* (2).

1. Sia $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ una serie di funzioni a variazione limitata convergente in un intervallo (a, b) verso una funzione pure a varia-

(1) G. FUBINI, *Una serie convergente di funzioni monotone (tutte non decrescenti o tutte non crescenti) è quasi ovunque derivabile termine a termine*, « Atti Accademia dei Lincei », 1915, Vol. 25, pag. 204. In questa nota si stabilisce un teorema di derivazione per serie di funzioni a variazione limitata che coincide col teorema di FUBINI nell'ipotesi che le funzioni siano monotone.

(2) L. TONELLI ha dimostrato il seguente teorema di convergenza in misura: *Se una successione di curve* C_n, *continue rettificabili, di lunghezza* s_n, *tende a una curva* C, *continua, rettificabile, di lunghezza* s, *in modo che* s_n *tende a* s, *le tangenti della* C_n *tendono* in misura *alle tangenti della* C, « Atti Accademia dei Lincei ». 1916, Vol. 25, pag. 22. Cfr. anche TONELLI, *Fondamenti del calcolo delle variazioni*, Bologna, 1921, Vol. I, pag. 92-105.

zione limitata

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \tag{1}$$

Indichiamo con $P_n(x)$, $N_n(x)$, $V_n(x)$ la variazione positiva, negativa, totale di $f_n(x)$ in (a, x) e con $P(x)$, $N(x)$, $V(x)$ la variazione positiva, negativa, totale di $f(x)$ in (a, x).

a) Lemma. – *La convergenza di una delle tre serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)$$

comporta la convergenza delle altre due e le seguenti uguaglianze

$$2[P(x) - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)] = 2[N(x) - \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x)] = V(x) - \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x).$$

Sia convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} P(x)$. Poniamo

$$P(x) + \mathcal{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) \tag{2}$$

con $\mathcal{S}(x)$ funzione finita definita dalla relazione stessa. Sottraendo membro a membro dalla (1) la (2) e la serie a termini costanti

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$$

si ha

$$f(x) - P(x) - \mathcal{S}(x) - f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x) - P_n(x) - f_n(a)]$$

cioè

$$N(x) + \mathcal{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x). \tag{3}$$

Sommando la (2) e la (3) si ha

$$V(x) + 2\mathcal{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x). \tag{4}$$

Si proverebbe ugualmente il teorema nell'ipotesi che si verifichi la (3) invece della (2).

Supponiamo infine che sia valida la (4). La serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ essendo minorante della serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)$ è pure convergente. Possiamo quindi porre

$$P(x) + Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$$

con $Q(x)$ funzione definita dalla relazione stessa, finita in ogni punto $x \subset (a, b)$. Ma per la dimostrazione del caso precedente si avrà pure

$$V(x) + 2Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)$$

e quindi $Q(x) = \mathcal{S}(x)$.

b) Teorema. - *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ *una serie di funzioni a variazione limitata convergente in un intervallo* (a, b) *verso una funzione* f(x) *pure a variazione limitata. Se è convergente una delle tre serie per* $x \subset (a, b)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x)$$

si ha quasi ovunque in (a, b)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Nell'ipotesi della convergenza di una delle tre serie per il lemma si ha

$$P(x) + \mathcal{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x), \qquad N(x) + \mathcal{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(x),$$

con $\mathcal{S}(x)$ funzione finita definita dalla relazione stessa. Per il teorema di Fubini è generalmente in $(a\ b)$

$$[P(x) + \mathcal{S}(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x), \qquad [N(x) + \mathcal{S}(x)]' = \sum_{n=1}^{\infty} N_n'(x).$$

Avendo $P(x)$, $N(x)$ quasi ovunque derivata determinata e finita in (a, b) anche la funzione $\mathcal{S}(x)$ ha quasi ovunque in (a, b) derivata determinata e finita ed è quindi generalmente in (a, b)

$$P'(x) + \mathcal{S}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x), \qquad N'(x) + \mathcal{S}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n'(x).$$

Sottraendo membro a membro, che è lecito essendo le due serie convergenti.

$$P'(x) - N'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [P_n'(x) - N_n'(x)]$$

ed essendo

$$f(x) = P(x) - N(x) + f(a), \qquad f_n(x) = P_n(x) - N_n(x) + f_n(x),$$
$$f'(x) = P'(x) - N'(x), \qquad f_n'(x) = P_n'(x) - N_n'(x),$$

si ha quasi ovunque in (a, b)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

2. a) LEMMA. - *Le funzioni* $f_n(x)$, *con* $n = 1, 2, \ldots$, *siano generalmente definite in un insieme misurabile e di misura finita* g, *ed ivi misurabili e quasi ovunque finite. Condizione necessaria e sufficiente perchè la successione* $\{f_n(x)\}$ *converga generalmente in* g, *ad una funzione* f(x), *è che ad ogni coppia di numeri positivi* ε, σ *si possa associare un indice* n_0 *tale che indicando con* g_n *l'insieme dei punti di* g *ove* $|f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon$, *resulti*

$$\operatorname{mis}\left[\sum_{n=n_0}^{\infty} g_n\right] < \sigma \text{ (3)}.$$

La condizione è necessaria.

Supponiamo che la successione $\{f_n(x)\}$ sia generalmente convergente in g ad $f(x)$. Essendo le funzioni $f(x)$, $f_n(x)$, con $n = 1, 2, \ldots$. misurabili e quasi ovunque finite in g (4) per il teorema di EGOROFF-SEVERINI ad ogni coppia di numeri positivi ε, σ si può associare un sub-aggregato g' di g e un indice n_0 tali che $\operatorname{mis}(g - g') < \sigma$ e per $x \subset g'$ e $n > n_0$

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Allora l'insieme $\sum_{n=n_0}^{\infty} g_n$ è contenuto in $(g - g')$ e la sua misura è quindi minore di σ.

La condizione è sufficiente.

Indichiamo con $g_{n,r}$, $r = 1, 2, \ldots$, l'insieme dei punti di g ove $|f(x) - f_n(x)| \geq \dfrac{1}{r}$.

Scelto un σ positivo arbitrario possiamo per le ipotesi far corrispondere alla coppia $\dfrac{1}{r}$, $\dfrac{\sigma}{2^r}$ un indice n_r tale che

$$\operatorname{mis}\left[\sum_{n=n_r}^{\infty} g_{n,r}\right] < \frac{\sigma}{2^r},$$

ove abbiamo indicato con n_r il più piccolo indice per cui vale la precedente relazione. In tale maniera, fissato σ, resultano definiti univocamente per ogni valore intero positivo di r gli insiemi

(3) Si osservi che la funzione $f(x)$, come limite in g di funzioni misurabili, è essa pure misurabile e che quindi l'insieme g_n è misurabile e così pure l'insieme $\sum_{n=n_0}^{\infty} g_n$ somma di una infinità numerabile di insiemi misurabili.

(4) La funzione $f(x)$ è quasi ovunque finita in g avendo supposto la successione $\{f_n(x)\}$ generalmente convergente in g.

misurabili $g_{n,r}$, un indice n_r, e corrispondentemente l'insieme misurabile

$$I_r = \sum_{n=n_r}^{\infty} g_{n,r} \quad \text{con} \quad \text{mis}\, I_r < \frac{\sigma}{2^r}.$$

L'insieme $I = \sum_{r=1}^{\infty} I_r$ è pure misurabile e

$$\text{mis}\, I \leq \sum_{r=1}^{\infty} \text{mis}\, I_r < \sigma. \tag{6}$$

Nell'insieme $(g - I)$ la successione $\{f_n(x)\}$ è uniformemente convergente perchè comunque sia fissato un numero positivo ε, potendosi scegliere r tale che $\frac{1}{r} < \varepsilon$ ed essendo quindi per la definizione di g_n, $g_{n,r}$, n_r, I_r, $g_n \subset g_{n,r}$, $\sum_{n=n_r}^{\infty} g_n \subset I_r$, si ha per $n > n_r$ e $x \subset (g - I) \subset (g - I_r)$ $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

L'insieme misurabile dei punti di g ove la successione $\{f_n(x)\}$ non converge è contenuto nell'insieme I e quindi per la (6) la sua misura è minore di σ. Per l'arbitrarietà di σ tale insieme ha necessariamente misura nulla e cioè la successione $\{f_n(x)\}$ converge generalmente in g ad $f(x)$.

b) TEOREMA. - *In un intervallo* (a, b) *siano definite e a variazione limitata le funzioni* $f(x)$, $f_n(x)$, *con* $n = 1, 2, \ldots$, *e in tale intervallo la successione* $\{f_n(x)\}$ *converga quasi ovunque ad* $f(x)$. *Indicato con* s_n *la lunghezza dell'arco di curva la cui espressione analitica in* (a, b) *è* $y = f(x) - f_n(x)$ [5] *e indicato con* $\{a_n\}$ *una qualsiasi successione di termini positivi tale che la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *risulti convergente, se si può determinare una costante* A *tale che per qualsiasi valore dell'indice* n *è*

$$a_n[s_n - (b - a)] < A \tag{7}$$

allora la successione $\{f_n'(x)\}$ [6] *è quasi ovunque convergente in* (a, b) *ad* $f'(x)$.

Fissato un numero ε positivo arbitrario, indichiamo con g_n l'insieme dei punti di (a, b) ove $|f'(x) - f_n'(x)| > \varepsilon$. Ne segue:

$$\sqrt{1 + [f'(x) - f_n'(x)]^2} > \sqrt{1 + \varepsilon^2} \quad \text{per } x \subset g_n,$$
$$\sqrt{1 + [f'(x) - f_n'(x)]^2} > 1 \qquad \text{per } x \subset [(a, b) - g_n],$$

[5] Essendo la funzione $f(x) - f_n(x)$ per ipotesi a variazione limitata, la curva $y = f(x) - f_n(x)$ è rettificabile.

[6] Essendo le funzioni $f(x)$, $f_n(x)$ per ipotesi a variazione limitata esse hanno quasi ovunque in (a, b) derivate determinate e finite.

quindi

$$\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)-f_n'(x)]^2}\,dx > \sqrt{1+\varepsilon^2}\ \mathrm{mis}\ g_n + \mathrm{mis}\ [(a,\ b) - g_n].$$

Essendo ([7])

$$s_n \geq \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)-f_n'(x)]^2}\,dx$$

per la precedente relazione si ha:

$$s_n - (b-a) > (\sqrt{1+\varepsilon^2}-1)\ \mathrm{mis}\ g_n .$$

Da questa disuguaglianza e dalla ipotesi (7) segue

$$\mathrm{a}_n(\sqrt{1+\varepsilon^2}-1)\ \mathrm{mis}\ g_n < A$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{mis}\ g_n < A' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{a}_n}, \qquad \left(A' = \frac{A}{\sqrt{1+\varepsilon^2}-1}\right).$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{mis}\ g_n$ risulta quindi convergente. Perciò fissato un σ positivo arbitrario esiste corrispondentemente un indice n_0 tale che

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{mis}\ g_n < \sigma.$$

Per il lemma precedentemente dimostrato la successione $\{f_n'(x)\}$ converge generalmente in $(a,\ b)$ ad $f'(x)$.