Bollettino Unione Matematica Italiana

Bruno Pini

Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 255–264.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_255_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali.

Nota di BRUNO PINI (a Bologna).

Sunto. - *Si esplicitano in termini finiti le soluzioni di un sistema completamente integrabile di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali con coefficienti costanti.*

1. - Recentemente sono stati studiati sistemi di equazioni lineari ai differenziali totali del primo ordine a coefficienti costanti, dal punto di vista della determinazione effettiva, in termini finiti, delle soluzioni. Limitatamente al caso di due sole variabili indipendenti (il caso di più variabili essendo del tutto simile), si consideri il si-

stema

$$dy = Aydu + Bydv \tag{1}$$

con $A \equiv \| a_{hk} \|$ e $B \equiv \| b_{hk} \|$ matrici quadrate d'ordine n, a termini costanti, e y un vettore incognito ad n componenti, funzioni delle variabili u e v, $y \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Supposto (1) completamente integrabile, cioè $AB = BA$, N. SALTYKOW [1] ha trovato che, se gli autovalori delle matrici A e B (cioè le radici delle equazioni det. $(A - \rho E) = 0$, det. $(B - \sigma E) = 0$) sono tutti semplici, è possibile associare ad ogni autovalore, ρ_i, di A un autovalore, σ_i, di B, in modo che coincidano i corrispondenti autovettori normalizzati (cioè i vettori unitari soluzioni dei sistemi $(A - \rho_i E)r = 0$, $(B - \sigma_i E)s = 0$). Detto $r_i \equiv (r_{1i}, r_{2i}, \dots, r_{ni})$ tale autovettore, segue che l'integrale generale di (1) è

$$y = \sum_1^n {}_i\, c_i \exp(\rho_i u + \sigma_i v) \cdot r_i, \tag{2}$$

dove le c_i sono delle costanti arbitrarie.

I risultati di N. SALTYKOW sono stati precisati da E. VESSIOT [2], nel caso, un po' più generale, che gli autovalori di una sola delle matrici A e B siano tutti semplici. Successivamente H. CHARLES [3], fondandosi sulla trasformazione di LAPLACE, ha trattato il caso di un sistema del tipo (1) di due equazioni in due variabili; ma i risultati conseguiti non sono molto precisi perchè non sono tenute nel dovuto conto le conseguenze algebriche dell'ipotesi della completa integrabilità del sistema.

Qui noi vogliamo stabilire la forma dell'integrale generale di (1) senza la restrizione che gli autovalori siano semplici; però vogliano dapprima riprendere il caso degli autovalori semplici perchè esso si può trattare con mezzi elementarissimi. Cominciamo con l'osservare che, relativamente a un sistema del tipo (1) ove le matrici A e B, anzichè costanti, siano funzioni di u e v limitate sull' intervallo $I\begin{pmatrix} u_1 \leq u \leq u_2 \\ v_1 \leq v \leq v_2 \end{pmatrix}$, nell'ipotesi che la A, per ogni valore di u, sia assolutamente continua rispetto a v, che la B, per ogni valore di v, sia assolutamente continua rispetto ad u, che quasi-

[1] N. SALTYKOW, *Integration des équations aux differentielles totales linéaires à coefficients constants*, « C. R. Acad. Sci. Paris », 225 (1947), 520-521.

[2] E. VESSIOT, *Sur l'integration des systèmes de Pfaff linéaires et homogènes à coefficients constants*, « C. R. Acad. Sci. Paris », 226 (1948), 289-291.

[3] H. CHARLES, *Sur les systémes de Pfaff linéaires homogènes à coefficients constants*, « Bull. Soc. Sci. Liége, 17 (1948), 66-69.

dappertutto su I sia soddisfatta la condizione $\frac{\partial A}{\partial v} + AB = \frac{\partial B}{\partial u} + BA$, e che le matrici $\frac{\partial A}{\partial v}$ e $\frac{\partial B}{\partial u}$ siano sommabili in I, allora, noti n integrali ([4]) particolari $y_i \equiv (y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni})$, $i = 1, 2, \dots, n$, e posto $W(u, v) \equiv \| y_{hk} \|$, sussiste la formola

$$\det. W(u, v) = \det. W(u_0, v_0) \cdot \exp (\gamma) \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} [\Sigma_1^n a_{ii}(u, v) du + \Sigma_1^n b_{ii}(u, v) dv],$$

analoga alla formola di JACOBI relativa al caso di un sistema normale ordinario ([5]) (il differenziale che figura sotto il segno di integrale curvilineo riesce esatto come conseguenza della completa integrabilità del sistema). Segue da ciò che, se gli y_i sono tali che $\det. W(u_0, v_0) \neq 0$, l'integrale generale è

$$y = W(u, v) c,$$

con c vettore costante arbitrario.

Ciò premesso, tornando al sistema (1), supponiamo che una delle due matrici A e B, p. es. A, abbia autovalori tutti semplici; allora, in corrispondenza a ciascun autovalore ρ_i, la matrice A ha un solo autovettore (a meno di un fattore costante) r_i e gli autovettori $r_1, r_2, \dots, r_n$ riescono, com'è noto, linearmente indipendenti. Ora, da $(A - \rho_i E) r_i = 0$ si deduce $(BA - \rho_i B) r_i = 0$ e, per l'ipotesi che sia $AB = BA$, $(A - \rho_i E) B r_i = 0$; ciò implica che anche $B r_i$ sia un autovettore di A corrispondente all'autovalore ρ_i, onde, per quanto è stato detto sopra, esisterà un numero σ_i tale che $B r_i = \sigma_i r_i$; dunque a ciascun autovalore, ρ_i, di A si può associare un autovalore, σ_i, di B, non necessariamente semplice, in modo tale che coincidano i corrispondenti autovettori; tenendo presente che gli autovettori sono linearmente indipendenti, resta provata la (2), in base a (3).

2. Passiamo ora al caso generale che entrambe le matrici A e B abbiano autovalori multipli.

Cominciamo col provare che:

Se ρ_1 *e* σ_1 *sono due autovalori multipli d'ordine* p, *rispettiva-*

([4]) Per integrale s'intenderà un vettore $y(u, v)$ assolutamente continuo rispetto ad u e a v su I, ivi verificante quasi-dappertutto (1).

Cfr. B. PINI, *Sui sistemi di infinite equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali*, « Gior. di Mat. di Battaglini », 78 (1948-49), 151-167.

([5]) G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, I (Bologna, 1948) 54-55.

mente di A *e di* B, *cui corrisponda un autovettore* r_1 *comune ad* A *e a* B, *allora* (1) *ammette l'integrale*

$$y_k = \exp.(\rho_1 u + \sigma_1 v) \cdot P_k(u, v) \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$

dove i $P_k(u, v)$ *sono polinomi in* u *e* v, *di grado al più* $p - 1$, *dipendenti linearmente da* p *costanti arbitrarie, combinazione lineare di* p *integrali linearmente indipendenti.*

La dimostrazione si può fare per induzione imitando l'analoga relativa al caso di un sistema ordinario ([6]). Si può supporre che sia $\rho_1 = \sigma_1 = 0$; in caso contrario basterebbe effettuare la sostituzione $y = \exp.(\rho_1 u + \sigma_1 v) \cdot z$, con che il sistema (1) diverrebbe

$$dz = (A - \rho_1 E)z du + (B - \sigma_1 E) z dv, \tag{1'}$$

anch'esso completamente integrabile, con le matrici $A - \rho_1 E$, $B - \sigma_1 E$ aventi lo zero come autovalore multiplo d'ordine p, e quindi potremmo ragionare sul sistema (1') anzichè su (1). Sia dunque $\rho_1 = \sigma_1 = 0$ e supponiamo che sia $r_{11} \neq 0$, anzi, com'è possibile, eguale a 1; poniamo

$$y = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ r_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} z = Tz,$$

con che il sistema (1) diventa

$$dz = T^{-1}ATz du + T^{-1}BTz dv, \tag{4}$$

anch'esso completamente integrabile $(T^{-1}AT \cdot T^{-1}BT = T^{-1}ABT = T^{-1}BAT = T^{-1}BT \cdot T^{-1}AT)$. Questo si spezza nella prima equazione

$$dz_1 = \sum_2^n{}_\iota\, a_{1\iota} z_\iota du + \sum_2^n{}_\iota\, b_{1\iota} z_\iota dv \tag{5}$$

e nel sistema

$$dz_k = \sum_2^n{}_\iota\, (a_{k\iota} - r_{k1} a_{1\iota}) z_\iota du + \sum_2^n{}_\iota\, (b_{k\iota} - r_{k1} b_{1\iota}) z_\iota dv, \quad k = 2, 3, \dots, n \tag{6}$$

che è dello stesso tipo di (1), anch'esso completamente integra-

([6]) Cfr. l. c. in ([5]) 66-72. Vogliamo qui osservare che la stessa dimostrazione prova che la conoscenza di un integrale particolare di (1) permette di ricondurre la risoluzione di questo sistema a quella di un sistema dello stesso tipo, ma in $n - 1$ equazioni, e a delle quadrature; cfr. R. H. GERMAY, *Extension d'un théorème de Lagrange aux systèmes complètement intégrables d'équations aux différentielles totales de forme linéaire et homogène*, « Bull. Soc. Sci. Liége », 16 (1947), 17-23.

bile come subito si riconosce in conseguenza delle $Ar_1 = Br_1 = 0$, $AB = BA$. Le due matrici $\| a_{ki} - r_{k1} a_{1i} \|$, $\| b_{ki} - r_{k1} b_{1i} \|$ hanno lo zero come autovalore multiplo di ordine $p - 1$, cui corrisponde un comune autovettore. Allora, poichè l'asserto è vero per $p = 1$, ammessolo per il sistema (6), cioè supposto che tale sistema abbia l'integrale

$$z_k = Q_k(u, v) \qquad k = 2, \dots, n$$

coi $Q_k(u, v)$ polinomi d'ordine al più $p - 2$, dipendenti linearmente da $p - 1$ costanti arbitrarie, poichè il secondo membro della (5) riesce un differenziale esatto (in conseguenza delle $Ar_1 = Br_1 = 0$, $AB = BA$) si ha

$$z_1 = (\gamma) \int_{(u_0, v_0)}^{(u, v)} [\sum_2^n{}_i a_{1i} Q_i(u, v) du + \sum_2^n{}_i b_{1i} Q_i(u, v) dv] + \text{cost.}, \; z_k = Q_k(u, v), \; k = 2, \dots,$$

il che prova l'asserto, essendo linearmente indipendenti, come subito si verifica, i p integrali così ottenuti.

3. Volendo precisare, conviene riferirci alle matrici normalizzate. Allo scopo ricordiamo che se $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\mu$ sono gli autovalori distinti della matrice A, degli ordini rispettivi di molteplicità $l_0^{(1)}, l_0^{(2)}, \dots, l_0^{(\mu)}$ $(\sum_1^\mu{}_i l_0^{(i)} = n)$, indicato, per ogni i $(i = 1, 2, \dots, n)$, con $l_k^{(i)}$ l'esponente massimo con cui il fattore $\rho - \rho_i$ è contenuto nel m. c. d. dei minori di ordine $n - k$ di det. $(A - \rho E)$, si ha, com'è noto [7], $l_0^{(i)} > l_1^{(i)} > \dots > l_{\nu_i}^{(i)}$, se $l_{\nu_i}^{(i)}$ è l'ultimo esponente non nullo. Posto $l_0^{(i)} - l_1^{(i)} = e_0^{(i)}, \dots, l_{\nu_i - 1}^{(i)} - l_{\nu_i}^{(i)} = e_{\nu_i - 1}^{(i)}$, $l_{\nu_i}^{(i)} = e_{\nu_i}^{(i)}$ $(e_0^{(i)} \geq e_1^{(i)} \geq \dots \geq e_{\nu_i}^{(i)})$, si ha

$$\text{det.}(A - \rho E) = (-1)^n \prod_1^\mu{}_i \prod_0^{\nu_i}{}_j (\rho - \rho_i)^{e_j^{(i)}} \qquad \sum_1^\mu{}_i \sum_0^{\nu_i}{}_j e_j^{(i)} = n.$$

Orbene, facendo uso dei divisori elementari di WEIERSTRASS $(\rho - \rho_i)^{e_j^{(i)}}$, la matrice A si può ricondurre alla forma canonica classica $\mathcal{A}$ per mezzo di una sostituzione lineare H $(H^{-1} A H = \mathcal{A})$ [8]. Per comodità di notazione, indicata con E_m la matrice unità di

(7) Cfr. p. es. M. BÔCHER, *Introduction to higher algebra.* (New-York, 1907), 262-278.

(8) Cfr. p. es. H. W. TURNBULL, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices*, (London, 1932), cap. VI, in particolare pp. 66 e seg.; J. H. M. WEDDERBURN, *Lectures on Matrices*, « Am. Math. Soc. Colloquium publications », vol. XVII, 1934, cap. III, pp. 38 e segg.

ordine m e con $U_m \equiv \| u_{hk} \|$ la matrice quadrata d'ordine m per cui è $u_{hk} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ per $k \underset{+}{=} h + 1$, riesce

$$\mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{A}_1 & & & \\ & \mathfrak{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{A}_\mu \end{Vmatrix}$$

ove le sottomatrici diagonali $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$, sono definite come segue:

$$\mathfrak{A}_i = \begin{Vmatrix} \rho_i E_{e_0^{(i)}} + U_{e_0^{(i)}} & & & \\ & \rho_i E_{e_1^{(i)}} + U_{e_1^{(i)}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_i E_{e_{\nu_i}^{(i)}} + U_{e_{\nu_i}^{(i)}} \end{Vmatrix}$$

Ora B è permutabile con A e quindi è del tipo $H\mathfrak{B}H^{-1}$ (9) dove $\mathfrak{B}$ è una matrice del tipo

$$\mathfrak{B} = \begin{Vmatrix} \mathfrak{B}_1 & & & \\ & \mathfrak{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathfrak{B}_\mu \end{Vmatrix}$$

dove le sottomatrici diagonali $\mathfrak{B}_i$ sono definite come segue

$$\mathfrak{B}_i = \begin{Vmatrix} \mathfrak{B}^{(i)}_{0,0} & \mathfrak{B}^{(i)}_{0,1} & \cdots & \mathfrak{B}^{(i)}_{0,\nu_i} \\ \mathfrak{B}^{(i)}_{1,0} & \mathfrak{B}^{(i)}_{1,1} & \cdots & \mathfrak{B}^{(i)}_{1,\nu_i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathfrak{B}^{(i)}_{\nu_i,0} & \mathfrak{B}^{(i)}_{\nu_i,} & \cdots & \mathfrak{B}^{(i)}_{\nu_i,\nu_i} \end{Vmatrix}$$

dove $\mathfrak{B}^{(i)}_{hk}$ è una matrice con $e_h^{(i)}$ righe ed $e_k^{(i)}$ colonne nella quale: se $h \leq k$ sono tutti eguali tra loro i termini per cui la differenza tra il secondo e il primo indice è una costante, rispettivamente eguale a $0, 1, \ldots, e_k^{(i)} - 1$, e nulli tutti i restanti; se $h > k$ sono tutti eguali tra loro i termini per cui la differenza tra il secondo e il primo indice è una costante, rispettivamente eguale ad $e_k^{(i)} - e_h^{(i)}$, $e_k^{(i)} - e_h^{(i)} + 1, \ldots, e_k^{(i)} - 1$, e nulli tutti i restanti.

Orbene, se poniamo $y = Hz$, il sistema (1) diventa, moltiplicato a sinistra per H^{-1},

$$dz = \mathfrak{A}z du + H^{-1}BHz dv$$

ovvero, poichè $B = H\mathfrak{B}H^{-1}$,

$$dz = \mathfrak{A}z du + \mathfrak{B}z dv. \tag{7}$$

(9) Cfr. p. es. H. W. Turnbull, l. c. in (8), pp. 146-147.

Le equazioni det. $(\mathfrak{A} - \rho E) = 0$, det. $(\mathfrak{B} - \sigma E) = 0$ hanno le stesse radici e gli stessi divisori elementari delle det. $(A - \rho E) = 0$, det. $(B - \sigma E) = 0$. Come primo vantaggio dell'operata sostituzione si ha che il sistema (7) si spezza in μ sistemi, di cui l'i-mo nel vettore incognito $z_i \equiv (z_{l_0^{(0)}+l_0^{(1)}+\dots+l_0^{(i-1)}+1}, \dots, z_{l_0^{(0)}+l_0^{(1)}+\dots+l_0^{(i)}})$, $i = 1, 2, \dots, \mu$, $l_0^{(0)} = 0$, e, noto un integrale di uno di questi sistemi, si avrà corrispondentemente un integrale di (7) ponendo eguali a zero tutte le restanti incognite. Possiamo quindi limitarci a ragionare su uno di tali sistemi, p. es. sul primo

$$dz_1 = \mathfrak{A}_1 z_1 du + \mathfrak{B}_1 z_1 dv. \tag{8}$$

La matrice $\mathfrak{A}_1$ ha il solo autovalore ρ_1 multiplo d'ordine $l_0^{(1)}$ e i $\nu_1 + 1$ autovettori $r_i^{(1)}$, $i = 0, 1, \dots, \nu_1$, tali che

$$r^{(1)}_{k,i} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{per } k = e_0^{(1)} + e_1^{(1)} + \dots + e_{i-1}^{(1)} + 1 \qquad (e_{-1}^{(1)} = 0)$$

e si può intanto osservare che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè tutte le soluzioni di (1) *siano di tipo esponenziale puro (cioè del tipo* (2)) *è che tutti i divisori elementari di entrambe le matrici* A *e* B *siano lineari* [10]: *in ogni caso si perderanno tanti integrali del tipo anzidetto almeno quante sono le unità dell'intero* $\sum_{1}^{\mu} \sum_{0}^{\nu_i} (e_j^{(i)} - 1) = n - \mu - \sum_{1}^{\mu} \nu_i$ *e al più* $n - \mu$.

La condizione è necessaria perchè se una delle matrici A e B avesse un divisore elementare con esponente maggiore di uno, allora tale matrice avrebbe un numero di autovettori linearmente indipendenti inferiore ad n. La condizione è anche sufficiente: infatti, supposta verificata, si ha, per $i = 1, 2, \dots, \mu$, $\mathfrak{A}_i = \rho_i E_{l_0^{(i)}}$, mentre $\mathfrak{B}_i$ può essere portato a forma diagonale (con una sostituzione lineare) e quindi ha il numero massimo, $l_0^{(i)}$, di autovettori linearmente indipendenti i quali necessariamente saranno combinazioni lineari degli $l_0^{(i)}$ autovettori di $\mathfrak{A}_i$, e quindi autovettori di $\mathfrak{A}_i$ stesso. Poichè ciò è vero per ogni valore di i, si vede che $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ hanno in comune esattamente n autovettori linearmente indipendenti.

L'affermazione finale è poi immediata se si tiene presente che $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \dots, \mu)$ ha, in comune con $\mathfrak{B}_i$, almeno un autovettore e al più $\nu_i + 1$ autovettori linearmente indipendenti.

(10) Non è quindi necessario, per avere integrali tutti di tipo esponenziale puro, supporre gli autovalori tutti semplici, come fanno gli AA. citati all'inizio; esempio notevole si ha nel caso delle matrici simmetriche; cfr. a questo proposito anche il lavoro citato in (4).

Tornando al sistema (8), se si tiene presente la struttura della matrice $\mathfrak{B}_1$, si riconosce che *la* $\mathfrak{B}_1$ *ha* ν_1+1 *autovalori,* $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{\nu_1}$, *multipli rispettivamente degli ordini* $e_0^{(1)}, e_1^{(1)}, \dots, e_{\nu_1}^{(1)}$ (beninteso che se uno di questi autovalori coincide con uno o più dei rimanenti, il che non è da escludere, esso avrà molteplicità eguale alla somma delle molteplicità che spetterebbero ad essi singolarmente qualora fossero distinti). Infatti vi è un unico determinante non nullo nella matrice costituita dalle righe di $\mathfrak{B}_1 - \sigma E_{l_0^{(1)}}$ degli ordini $e_0^{(1)}, e_0^{(1)} + e_1^{(1)}, \dots, e_0^{(1)} + e_1^{(1)} + \dots + e_{\nu_1}^{(1)}$, e precisamente quello i cui termini appartengono alle colonne degli stessi ordini; il determinante complementare è simile al det. $(\mathfrak{B}_1 - \sigma E_{l_0^{(1)}})$ e di ordine $l_0^{(1)} - (\nu_1 + 1)$; su di questo si può ragionare allo stesso modo, ecc.; in definitiva si ha lo sviluppo di det. $(\mathfrak{B}_1 - \sigma E_{l_0^{(1)}})$ come prodotto di certe potenze, da cui si può dedurre l'asserto.

Supponiamo, dapprima che siano tutti distinti gli autovalori $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{\nu_1}$; allora, com'è noto ([11]), a ciascun autovalore σ_i restano associati certi autovettori di $\mathfrak{B}_1$, siano $s_1^{(i)}, \dots s_{k_i}^{(i)}$, $i=0, \dots \nu_1$, $1 \leq k_i \leq e_i^{(1)}$, complessivamente linearmente indipendenti. Orbene, riferendoci per es. a σ_0, poichè da $(\mathfrak{B}_1 - \sigma_0 E)s = 0$ segue $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 - \sigma_0\mathfrak{A}_1)s = 0$, cioè $(\mathfrak{B}_1 - \sigma_0 E)\mathfrak{A}_1 s = 0$, si vede che se s è un autovettore di $\mathfrak{B}_1$, lo stesso si può dire di $\mathfrak{A}_1 s$, il quale sarà perciò una combinazione lineare di $s_1^{(0)}, \dots, s_{k_0}^{(0)}$; perciò

$$\mathfrak{A}_1 s_r^{(0)} = \sum_1^{k_0} {}_s\, c_{rs} s_s^{(0)} \qquad r = 1, 2, \dots, k_0,$$

dove le c_{rs} sono certe costanti; si può ora determinare un numero x e k_0 numeri $c_1^*, \dots, c_{k_0}^*$, non tutti nulli, per cui sia

$$\sum_1^{k_0} {}_s\, c_s^* c_{sr} = x c_r^* \qquad r = 1, 2, \dots, k_0.$$

onde sarà

$$\mathfrak{A}_1 (\sum_1^{k_0} {}_r\, c_r^* s_r^{(0)}) = x(\sum_1^{k_0} {}_r\, c_r^* s_r^{(0)});$$

ne segue che x è autovalòre della matrice $\mathfrak{A}_1$, cioè $x = \rho_1$, e $\sum_1^{k_0} {}_r\, c_r^* s_r^{(0)}$ (non nullo perchè gli s sono vettori linermente indipendenti e le c^* non sono tutte nulle) sarà quindi un autovettore della matrice $\mathfrak{A}_1$. Dunque le matrici $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{B}_1$ hanno esattamente $\nu_1 + 1$ autovettori comuni. Pertanto se si tiene presente quanto è stato provato in **2.** si vede che, corrispondentemente, (8) ha $l_0^{(1)}$ integrali

([11]) Quanto è affermato si può, p. es. dedurre dalla forma canonica della matrice A; cfr. ([8]).

indipendenti che si possono suddividere in $\nu_1 + 1$ gruppi ([12]) di cui l'h-mo ($h = 0, 1, \dots, \nu_1$) compendiato nell'integrale

$$(9) \qquad z_k^{(h)} = p_k^{(h)}(u, v) \cdot \exp.(\rho_1 u + \sigma_h v) \qquad k = 1, 2, \dots, l_0^{(1)}$$

dove le $p^{(h)}(u, v)$ stanno ad indicare certi polinomi di grado al più $e_h^{(1)} - 1$ dipendenti linearmente da $e_h^{(1)}$ costanti arbitrarie.

Supponiamo ora che le σ non siano tutte distinte; per esempio, $\sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_h$ e distinte le restanti σ.

Allora, corrispondentemente, le matrici $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{B}_1$ avranno in comune almeno uno e al più $h + 1$ autovettori linearmente indipendenti (p. es. se $\mathfrak{A}_1$ ha tutti i divisori elementari lineari, allora $\mathfrak{B}_1$ può essere del tutto generale onde se essa è del tipo $\sigma_1 E_{l_0}^{(1)}$, o a questa riducibile, allora $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{B}_1$ avanno in comune esattamente il numero massimo possibile, $l_0^{(1)}$, di autovettori linearmente indipendenti; se essa è del tipo $\sigma_1 E_{l_0}^{(1)} + U_{l_0}^{(1)}$, o a questa riducibile, le stesse matrici avranno in comune un solo autovettore, e tra l'uno e l'altro caso possono effettivamente presentarsi tutti i casi possibili). In ogni modo, per 2., potremo ancora affermare l'esistenza dei sistemi integrali (9) di (8) salvo che i primi $h + 1$ gruppi dovranno essere sostituiti da

$$z_k = p_k(u, v) \cdot \exp.(\rho_1 u + \sigma_0 v) \qquad k = 1, 2, \dots, l_0^{(1)}$$

coi $p_k(u, v)$ polinomi, di grado al più $e_0^{(1)} + e_1^{(1)} + \dots + e_h^{(1)} - 1$, dipendenti linearmente da $e_0^{(1)} + \dots + e_h^{(1)}$ costanti arbitrarie. Ecc.

Si può pertanto concludere dicendo che:

Se il sistema (1) *è completamente integrabile, se* $\bar{\rho}$ *è un autovalore di* A, *multiplo d'ordine* ν *e se* $e_0, e_1, \dots, e_{n_\nu}$ *sono gli esponenti (ordinati) dei divisori elementari* $(\rho - \bar{\rho})^e$, *la matrice* B *ha corrispondente* $n_\nu + 1$ *autovalori (non necessariamente distinti)* $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n_\nu}$ *multipli almeno degli ordini* $e_0, e_1, \dots, e_{n_\nu}$, *rispettivamente, ed esistono per* (1) $n_\nu + 1$ *gruppi di integrali indipendenti di cui l'*i*-mo compendiato nell'integrale*

$$y_k = q_k^{(i)}(u, v) \cdot \exp.(\bar{\rho} u + \sigma_i v) \qquad k = 1, 2, \dots, n; \; i = 0, 1, \dots, n_\nu$$

([12]) Che si determineranno applicando ripetutamente il procedimento indicato in 2. Osserviamo esplicitamente che se le matrici $\mathfrak{A}_1$ e $\mathfrak{B}_1$ hanno un solo autovettore comune r_i, corrispondente agli autovalori ρ_1 e σ_i ($i = 0, 1, \dots, \nu_i$), supposto, come in 2., che sia $\rho_1 = \sigma_i = 0$, operata la sostituzione $z_1 = T_i w_i$, il sistema trasformato $dw_i = T_i^{-1}\mathfrak{A}_1 T_i w_i du + T_i^{-1}\mathfrak{B}_1 T^{-1} w_i dv$ avrà le due matrici col solo autovettore $T_i^{-1} r_i$ in comune; infatti se queste avessero un altro autovettore in comune, sia $T_i^{-1}s_i$, riuscirebbe $\mathfrak{A}_1 s_i = \mathfrak{B}_1 s_i = 0$, contro l'ipotesi.

dove le $q^{(i)}(u, v)$ *sono polinomi di grado al più* $e_i - 1$ *e dipendenti linearmente da* e_i *costanti arbitrarie; se poi due o più delle* σ *coincidono, i corrispondenti gruppi di integrali si fondono in un unico gruppo ove i fattori polinomiali sono di grado al più eguale alla somma, diminuita di una unità, delle* e *corrispondenti alle* σ *che coincidono, e dipendono linearmente da tante costanti arbitrarie quante sono le unità di tale somma.*