BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE TEDONE

Su un tipo particolare di mezzi ottici isotropi eterogenei

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 5
(1950), n.3-4, p. 251–255.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_251_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Su un tipo particolare di mezzi ottici isotropi eterogenei.

Nota di GIUSEPPE TEDONE (a Roma).

Sunto. - *Il contenuto della Nota è sostanzialmente riassunto al n. 1. A quanto ivi è detto si aggiungono (nn. 3 e 5) una interpretazione geometrica del risultato e (n. 6) qualche osservazione sul problema dinamico corrispondente al problema ottico preso in esame.*

1. L'ipotesi che tutti i raggi luminosi uscenti dal generico punto di un mezzo isotropo eterogeneo siano circolari riporta, come è noto ⁽¹⁾, ai due casi ormai classici di una velocità di avanzamento funzione lineare della distanza da un piano o del quadrato della distanza da un punto fisso.

Se si ammette che ogni raggio uscente dal generico punto P del mezzo tangenzialmente alla superficie di ugual indice per P ⁽²⁾ appartenga interamente alla superficie medesima, si trova che ciascuno di questi raggi non può che essere circolare, senza che perciò

⁽¹⁾ Cfr. A. SIGNORINI, *Lezioni di fisica matematica dell'anno accademico 1949-50*, cap. III, (ed. Veschi, Roma, 1950).

⁽²⁾ Cioè alla superficie $n(x_1, x_2, x_3) = \text{cost}$, ove n è il variabile indice di rifrazione, passante per P .

lo stesso andamento abbiano anche gli altri ⁽²⁾; e il mezzo risulta caratterizzato dall'essere l'indice di rifrazione inversamente proporzionale alla distanza da un punto fisso (mezzo in cui, come pure è noto, il generico raggio è una spirale logaritmica).

2. Fissiamo dunque l'attenzione su una determinata ma qualunque, σ_n , tra le superficie di ugual indice e su un raggio l che, uscendo tangenzialmente a σ_n dal generico punto P di questa, vi appartenga interamente. Indicheremo come di consueto con T ed N i versori della tangente e, rispettivamente, della normale principale al raggio, con s l'ascissa curvilinea lungo di esso, con u il versore, normale a σ_n , di grad n .

Il piano individuato da T e u — piano di propagazione — coincide sempre nel generico punto di un raggio col piano osculatore al raggio nel punto medesimo, sicchè sempre N è contenuto nel piano Tu . Se si ammette l'appartenenza del raggio alla σ_n si può dire di più che la normale principale a l non può differire dalla normale alla superficie, e si riconosce così che nelle ipotesi poste il raggio è una geodetica di σ_n .

D'altra parte se si proietta su N la cosiddetta equazione classica dei raggi,

$$(1) \quad \frac{d}{ds}(nT) = \text{grad } n = |\text{grad } n| u.$$

si ottiene

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} = \frac{|\text{grad } n|}{n};$$

tutti i raggi uscenti tangenzialmente a σ_n (possiamo ormai dire tutte le geodetiche di σ_n passanti per P) hanno in P la medesima flessione. Ma P non è che un punto qualunque di σ_n ; ciò che si è detto per esso si può ripetere per ogni altro punto della superficie con la conclusione che per questa ogni punto viene ad essere un ombelico. Pertanto non può trattarsi che di una sfera o di un piano.

⁽²⁾ Ciò non è in contrasto con quanto ad esempio afferma W. LENZ nella memoria *Zur Theorie der optischen Abbildung* [vedi P. DEBYE, *Probleme der modernen Physik* (« Sommerfeldfestschrift »); Leipzig, Hirzel, 1928, pagg. 198-207] esser cioè sufficiente che un raggio luminoso sia circolare perchè ogni raggio risulti tale. Nelle ipotesi da noi poste il mezzo risulta essere a simmetria sferica e tale è anche quello considerato dal LENZ; ma la dimostrazione che egli dà viene meno non appena si supponga che il centro del raggio luminoso circolare del quale ammette l'esistenza cada nel centro di simmetria del mezzo, mentre proprio in questo punto viene inevitabilmente a cadere il centro di ognuno dei raggi circolari che si hanno nel nostro caso.

Ma che possa trattarsi di un piano lo si può escludere subito non appena si voglia escludere, com'è naturale, l'eventualità $|\text{grad } n| \equiv 0$.

La superficie σ_n presa in esame è dunque una sfera di raggio $r_n = \frac{n}{|\text{grad } n|}$ e i raggi luminosi ad essa appartenenti sono i suoi cerchi massimi.

3. Di questo risultato si può dare nel seguente modo una interpretazione geometrica.

Nell'ottica dei mezzi isotropi si arriva a stabilire una proprietà, in cui in sostanza vengono a riassumersi le proprietà geometriche di tutti i raggi, quella cioè che il circolo osculatore in P ad uno qualunque dei raggi passanti per P passa per il punto Q_P definito dall'uguaglianza

$$(3) \quad PQ_P = \frac{2u}{\partial \lg n} = \frac{2nu}{|\text{grad } n|}.$$

Nel caso attuale il punto Q_P viene ad essere il punto della sfera diametralmente opposto a P , e mentre in generale accade che il punto medio M del segmento PQ_P varia al variare di P sulla superficie di ugual indice, qui M si presenta per ogni σ_n come un punto — il centro della σ_n — ad essa invariabilmente associato.

4. Se dalla considerazione della σ_n si passa a quella della sfera ad essa infinitamente prossima, ci si rende subito conto attraverso la (2) che la seconda sfera riesce parallela alla prima: la distanza tra le due superficie $n(x_1, x_2, x_3) = c$ ed $n(x_1, x_2, x_3) = c + dc$ vale infatti

$$\delta = \frac{r_n dc}{n}$$

ed ha quindi in ogni punto di σ_n il medesimo valore.

Com'è naturale il ragionamento si estende alle successive superficie di ugual indice non appena si ammetta per tutte la circostanza già ammessa per la σ_n (l'appartenenza cioè ad ognuna dei raggi che ad essa riescono tangenti in un punto) con la conclusione che le superficie di ugual indice costituiscono una famiglia di superficie parallele, cioè di sfere concentriche.

5. Il risultato ora ottenuto si esprime, nella interpretazione geometrica pocanzi indicata, nella coincidenza dei punti M relativi alle diverse sfere in un unico punto O , il loro comune centro.

Tale risultato riduce ormai n semplicemente a una funzione

$n(r)$ della distanza r da O del generico punto del mezzo, ma resta ancora indeterminata la legge di dipendenza. Per stabilirla osserviamo che, dovendo essere $\text{grad } n \times N = \frac{n}{r} > 0$, $\text{grad } n$ deve avere verso concorde a N , cioè il verso di PO , e poichè $(\text{grad } n)_{OP} = \frac{dn}{dr}$ si ha

$$|\text{grad } n| = -\frac{dn}{dr},$$

in modo che la (2) può essere sostituita con

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{dr},$$

e di qui integrando si ottiene precisamente

$$(4) \quad n = \frac{h}{r}.$$

6. Ad un problema ottico in un mezzo isotropo corrisponde sempre, come è ben noto, un problema dinamico in un campo conservativo, il legame tra i due problemi essendo costituito dall'uguaglianza

$$(5) \quad n = \sqrt{2(U + E)}.$$

Nel caso attuale la (5), stante la (4), precisa il potenziale in una funzione lineare di $\frac{1}{r^2}$

$$(6) \quad U = \frac{h^2}{2r^2} - E,$$

ove E è da intendersi come una costante a priori arbitraria. Quando sia completamente assegnato il valore di U in corrispondenza ad una particolare superficie equipotenziale (cioè ad un particolare valore di r) la (6) viene a determinare univocamente il valore che si deve pensare attribuito alla costante E dell'energia. Questo individua come al solito un fascio di traiettorie: naturalmente quelle traiettorie del fascio che siano tangenti in un punto ad una qualunque delle sfere equipotenziali non possono che appartenervi interamente (e costituirne cerchi massimi).

Le medesime circostanze devono certo ripresentarsi quando si tratti direttamente il problema dinamico che in sostanza viene a prospettarsi nei termini seguenti. Un punto materiale P (di massa unitaria) è mobile in un campo conservativo di potenziale $U(r)$, soggetto quindi a una forza centrale. È noto che in tal caso scegliendo opportunamente le condizioni iniziali si possono avere per

il punto ~~traiettorie~~ circolari. Fissiamo allora l'attenzione su una particolare ~~sfera~~ equipotenziale σ_U di raggio r , cui corrisponda un ben determinato valore di U , e supponiamo P inizialmente appartenente a σ_U con velocità ad essa tangente. La condizione che la ~~traiettorie~~ sia un circolo massimo di σ_U si traduce nella relazione

$$\frac{v^2}{r} = - \frac{dU}{dr}$$

che può anche scriversi, stante l'integrale delle forze vive,

$$(7) \quad \frac{2(U + E)}{r} = - \frac{dU}{dr}.$$

Il valore che si otterrebbe di qui per E verrebbe in definitiva ad individuare quello da attribuire alla grandezza della velocità iniziale affinché le ~~traiettorie~~ inizialmente tangenti a σ_U riuscissero del tipo voluto.

Ma se dalla σ_U si passa ad un'altra, $\sigma_{U'}$, delle sfere equipotenziali lasciando invariato E , non è affatto detto che le ~~traiettorie~~ inizialmente tangenti a $\sigma_{U'}$ si svolgano per intero su di essa.

Quale dovrà essere allora la forma effettiva del potenziale perchè, verificandosi la circostanza indicata su una particolare σ_U , essa si verifichi, col medesimo valore di E come è richiesto nel nostro problema, su tutte le superficie equipotenziali? Basta per rispondere integrare la (7) nell'ipotesi di indipendenza di E da r : e si ottiene così per U una legge che è precisamente del tipo (6).