Carlo Bonferroni

Una catena di criteri di convergenza per serie e integrali a termini positivi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.3-4, p. 218–225.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_3-4_218_0>

Una catena di criteri di convergenza per serie e integrali a termini positivi.

Nota di CARLO BONFERRONI (a Firenze) (*).

Suuto. - *Partendo da un qualsiasi criterio derivato dalla condizione di* KUMMER, *si costruisce una catena di infiniti criteri, ciascuno più efficace del precedente. In particolare, al criterio del rapporto segue quello di* RAABE, *poi un criterio simile a quello di* DE MORGAN, *poi infiniti altri. La trattazione è adattata agli integrali, costruendo analoghe catene di criteri di convergenza-divergenza. Sono fatte applicazioni ad alcune serie ed alcuni integrali.*

1. È utile disporre di criteri di convergenza (o divergenza) disposti in ordine crescente di *efficacia*, intendendo che il criterio B è più efficace di A se conduce a decisione ogniqualvolta decida anche A, ma non viceversa. Si evitano, in tal modo, inutili tentativi, derivanti dal passare da un criterio ad altro di eguale, o mi-

(*) Comunicazione tenuta al III Congresso dell'U. M. I. (Pisa, settembre 1948).

nore, efficacia. Si può costruire una successione, o catena, di infiniti criteri, ciascuno più efficace del precedente, sviluppando opportunamente la condizione generale di convergenza-divergenza di KUMMER per le serie, e stabilendo una condizione analoga per gli integrali.

2. *Serie.* Detto k_n il *moltiplicatore* di KUMMER ($k_n > 0$), lo si applichi alla serie Σa_n (con $a_n > 0$): si otterrà l'*indice* di KUMMER

$$(1)\quad U_{n,1} = \frac{k_n a_n - k_{n+1} a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{-\Delta(k_n a_n)}{a_{n+1}} = k_n(\sigma_n - 1) - \Delta k_n \qquad \left[\sigma_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}\right].$$

Da $U_{n,1} \geq \varepsilon$ segue la convergenza; e da $U_{n,1} \leq 0$ segue la divergenza, quando diverga $\Sigma\, 1/k_n$.

L'indice, invece, non decide se cambia continuamente di segno o se è positivo, ma tende a zero al crescere di n.

Per migliorare l'indice, sostituiamo $k_n p_n$ a k_n: l'indice diverrà

$$\overline{U} = p_n U_{n,1} - k_{n+1} \Delta p_n$$

e sarà più efficace di $U_{n,1}$ se da $U_{x,1} \geq \varepsilon$ segue $\overline{U} \geq \varepsilon_0$, e da $U_{n,1} \leq 0$ segue $\overline{U} \leq 0$, ma non viceversa. Lo scopo si raggiunge mantenendo limitato $k_{n+1}\Delta p_n$, in modo però che p_n diverga: allora, anche se $U_{n,1}$ tende a zero, potrà non tendervi $p_n U_{n,1}$ e risultare $\overline{U} \geq \varepsilon_0$.

Nel modo più semplice, porremo quindi

$$k_{n+1}\Delta p_n = 1, \qquad p_n = \sum^n \frac{1}{k_n} = S_n \text{ (divergente).}$$

Il nuovo moltiplicatore $k_n S_n$ dà luogo alla $\overset{n}{\Sigma}\, 1/(k_n S_n)$, e questa sarà ancora divergente (per un noto teorema sulle serie divergenti a termini positivi); avremo cosi un secondo indice di convergenza-divergenza, più efficace del precedente:

$$(2)\qquad U_{n,2} = S_n U_{n,1} - 1, \quad U_{n,2} \begin{cases} \geq \varepsilon & \text{convergenza,} \\ \leq 0 & \text{divergenza.} \end{cases}$$

Per aumentarne l'efficacia, si operi su $U_{n,2}$ come su $U_{n,1}$, assumendo per moltiplicatore $k_n S_n S_{n,2}$, con $S_{n,2} = \Sigma\, 1/k_n S_n$ (divergente), ottenendo un terzo indice

$$(3)\qquad U_{n,3} = S_{n,2} U_{n,2} - 1.$$

Si passerà poi a

$$(4)\qquad U_{n,4} = S_{n,3} U_{n,3} - 1, \qquad S_{n,3} = \Sigma \frac{1}{k_n S_n S_{n,2}} \text{ (divergente)}$$

e così via. Si sara costruita, in tal modo, una catena di indici, cioè di criteri, ciascuno più efficace del precedente.

3. La somma $S_{n,h}$ è definita a meno di una costante additiva: sostituendo $S_{n,h}$ con $S_{n,h} - C$ (C costante positiva), la sensibilità di $U_{n,h+1}$ non viene modificata nel caso di convergenza ($U_{n,h+1} \geq \varepsilon$) perchè $(S_{n,h} - C)/S_{n,h}$ tende ad 1 al crescere di n; e così pure nel caso di divergenza, quando risulti $U_{n,h+1} \leq -\varepsilon$. Se, invece, non si può decidere, il nuovo indice può risultare ≤ 0, permettendo di concludere che la serie è divergente. Si ha un semplice mezzo, così, per migliorare $U_{n,h+1}$.

4. La più semplice catena si ottiene partendo da $k_n = 1$, e fornisce gli indici

$$\sigma_{n,1} = \sigma_n - 1$$
$$\sigma_{n,2} = n\sigma_{n,1} - 1 = n(\sigma_n - 1) - 1$$
$$\sigma_{n,3} = H_n\sigma_{n,2} - 1; \qquad H_n = \sum^n \frac{1}{n}$$
$$\sigma_{n,4} = H_{n,2}\sigma_{n,3} - 1; \qquad H_{n,2} = \sum^n \frac{1}{nH_n}$$
$$\sigma_{n,5} = H_{n,3}\sigma_{n,4} - 1; \qquad H_{n,3} = \sum^n \frac{1}{nH_nH_{n,2}}; \text{ ecc.}$$

Il 1° indice dà il criterio « del rapporto »; il 2° dà il criterio di Raabe. Quando si ponga $\log_2 n = \log\log n$, $\log_3 n = \log_2 \log n$, ecc. ... e si tenga presente che i rapporti

$$\frac{H_n}{\log n}, \quad \frac{H_{n,2}}{\log_2 n}, \quad \frac{H_{n,3}}{\log_3 n}, \ldots \quad [\log = \text{logaritmo naturale}]$$

tendono tutti ad 1, gli indici $\sigma_{n,3}$, $\sigma_{n,4}$, ecc. si potranno sostituire con

$$\bar\sigma_{n,3} = \log n \cdot \sigma_{n,2} - 1; \quad \bar\sigma_{n,4} = \log_2 n \cdot \bar\sigma_{n,3} - 1; \quad \bar\sigma_{n,5} = \log n \cdot \bar\sigma_{n,4} - 1; \text{ ecc.}$$

I nuovi indici equivalgono ai precedenti nel caso di convergenza ($\bar\sigma_{n,h} \geq \varepsilon$); e anche di divergenza, quando si accerti che è $\bar\sigma_{n,h} \leq -\varepsilon$ (ordinariamente, quando $\bar\sigma_{n,h}$ abbia limite negativo). Da $\bar\sigma_{n,h} \leq 0$ seguirà ancora divergenza, se $\bar\sigma_{n,h}$ supera $\sigma_{n,h}$ (o $\sigma_{n,h}$ migliorato, vedi n. 3, in fondo). Per es., in $\sigma_{n,3}$ si può assumere $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$, o, migliorando, $H_n = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} < \log n$. Ne segue che $\bar\sigma_{n,3} \leq 0$ denota divergenza. In conclusione, si ha

$$\log\left[n(\sigma_n - 1) - 1\right] \begin{cases} \geq 1 + \varepsilon, & \text{convergenza;} \\ \leq 1, & \text{divergenza;} \end{cases} \tag{5}$$

criterio noto, e attribuito a De Morgan. La condizione di divergenza può, però, allargarsi: partendo dal moltiplicatore $n \log n$, si avrà divergenza se

$$n \log n \cdot (\sigma_n - 1) - \Delta(n \log n) = \bar{\sigma}_{n,3} - \left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right] = \bar{\sigma}_{n.3} - p_n \leq 0,$$

condizione che può essere verificata anche per $\bar{\sigma}_{n,3} > 0$, essendo $p_n > 0$.

Similmente si analizzerà $\bar{\sigma}_{n.4}$, nel caso $\bar{\sigma}_{n,4} \leq 0$, quando si voglia ricorrere ad esso, invece che a $\sigma_{n,4}$.

5. Applicando rispettivamente gli indici $\sigma_{n,3}$, $\sigma_{n,4}$, $\sigma_{n,5}$... alle serie

$$\Sigma \frac{1}{nH_n{}^{1+\varepsilon}}; \qquad \Sigma \frac{1}{nH_nH_{n,2}{}^{1+\varepsilon}}; \qquad \Sigma \frac{1}{nH_nH_{n,2}H_{n,3}^{1+\varepsilon}} \quad \ldots$$

si riconosce che esse, divergenti per $\varepsilon = 0$ (come sappiamo), convergono per $\varepsilon > 0$, perchè l'indice corrispondente tende ad ε.

Saranno tali anche

$$\Sigma \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}} \qquad \Sigma \frac{1}{n \log n (\log_2 n)^{1+\varepsilon}}; \qquad \Sigma \frac{1}{n \log n \log_2 n (\log_3 n)^{1+\varepsilon}}; \ldots$$

dato che il rapporto di due termini corrispondenti tende a 1 (come s'è già osservato).

6. Se Σa_n converge, la sua convergenza è rivelata da un opportuno indice di Kummer: posto, infatti,

$$A = \Sigma a_n, \qquad A_n = a_1 + \ldots a_n, \qquad k_n = \frac{A - A_n}{a_n},$$

risulta $U_{n,1} = 1$, essendo $U_{n,1}$ l'indice 1). Ciò significa che la condizione di Kummer è necessaria e sufficiente per la convergenza. Non si deve credere, però, che la convergenza di Σa_n sia rivelata da un indice $\sigma_{n,h}$, d'ordine sufficientemente elevato. Basta riflettere al fatto che, risolvendo la condizione $\sigma_{n,h} \geq \varepsilon$ rispetto a σ_n, si trae $\sigma_n > 1$, cioè che a_n decresce. Se ciò non avviene, nessun indice $\sigma_{n,h}$ permetterà di concludere.

In generale, la condizione di Kummer dà

$$(6) \qquad \sigma_n \geq \frac{k_{n+1} + \varepsilon}{k_n}; \qquad (7) \quad \frac{a_n}{C} \leq \alpha_{n,\varepsilon} \qquad [C = \text{costante}]$$

con

$$(8) \quad \alpha_{n,\varepsilon} = \frac{k_1 k_2 \ldots k_{n-1}}{(k_1 + \varepsilon)(k_2 + \varepsilon)\ldots(k_n + \varepsilon)} = 1 \Big/ \left[k_n\left(1 + \frac{\varepsilon}{k_1}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{k_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\varepsilon}{k_n}\right)\right]$$

La serie $\Sigma \alpha_{n,\varepsilon}$ *associata al moltiplicatore* k_n, *converge per* $\varepsilon > 0$ *qualunque sia* k_n; e la condizione di convergenza dice che Σa_n è, a meno d'un fattore, minorante di una serie convergente associata a k_n. Essa non è, però, una *qualsiasi* minorante, potendo questa soddisfare alla (7) senza soddisfare a tutte le (6).

Il criterio del rapporto dà

$$\sigma_n \geq 1 + \varepsilon, \qquad \alpha_{n,\varepsilon} = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n$$

e le serie associate sono geometriche. Il criterio di RAABE esige che sia

$$\sigma_n \geq \frac{1+\varepsilon}{n}; \; \alpha_{n,\varepsilon} = \frac{(n-1)!}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)\dots(n+\varepsilon)} = \frac{1}{n\left(1+\frac{\varepsilon}{1}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\dots\left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)}$$

e la $\Sigma\,\alpha_{n,\varepsilon}$ rientra nel tipo delle serie *ipergeometriche*. Il criterio $\sigma_{n,3}$ conduce a

$$\sigma_n \geq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1+\varepsilon}{nH_n}; \quad \alpha_{n,\varepsilon} = \frac{(n-1)!\,H_1\dots H_{n-1}}{(H_1+\varepsilon)\dots(nH_n+\varepsilon)} =$$
$$= 1 \Big/ \left[nH_n\left(1+\frac{\varepsilon}{H_1}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{2H_2}\right)\dots\left(1+\frac{\varepsilon}{nH_n}\right)\right].$$

7. *Integrali.* - La precedente trattazione può adattarsi allo studio della convergenza o divergenza dell'integrale della funzione positiva a_x. Detto k_x il moltiplicatore, formeremo ora l'*indice*

$$(1') \qquad U_{x,1} = \frac{-1}{a_x}\frac{d}{dx}(k_x a_x) = k_x\sigma_x - k_x', \quad \sigma_x = \frac{-a_x'}{a_x} = -\frac{d}{dx}\log a_x .$$

Il « tasso di decremento » σ_x della funzione a_x sostituisce, ora, $\sigma_n - 1$.

Da $U_{x,1} \geq \varepsilon$ segue (integrando, p. es., da 1 ad x)

$$-\frac{d}{dx}(k_x a_x) \geq \varepsilon a_x, \qquad k_1 a_1 - k_x a_x \geq \varepsilon A_x, \qquad A_x = \int_1^x a_x dx.$$

La 1ª disuguaglianza dice che $k_x a_x$ è funzione decrescente; quindi la 2ª, in cui il 1° membro è positivo e minore di $k_1 a_1$, dice che A_x è limitato, cioè che l'integrale di a_x, da 1 a $+\infty$, è convergente Inversamente, se ciò avviene, basta assumere

$$k_x = \frac{A - A_x}{a_x}, \qquad A = \int_1^\infty a_x dx$$

per verificare la $U_{x,1} = 1$. L'esistenza del moltiplicatore k_x, che rende $U_{x,1} \geq \varepsilon$, è, dunque, condizione necessaria e sufficiente per la convergenza.

Se, invece, è $U_{x.1} \leq 0$, la funzione $k_x a_x$ sarà convergente, risulterà

$$k_x a_x > k_1 a_1 ; \qquad \int_1^\infty a_x dx \geq k_1 a_1 \int_1^\infty \frac{dx}{k_x}$$

e quindi l'integrale di a_x divergerà, se diverge quello di $1/k_x$. Pertanto, l'indice $U_{x,1}$ si comporta come $U'_{n,1}$. (Mutando integrali in sommatorie, il rapido procedimento ora esposto può applicarsi anche alle serie).

8. Se $U_{x,1}$ non permette di decidere, si assuma come moltiplicatore $k_x p_x$, ottenendo

$$\overline{U} = k_x p_x \sigma_x - \frac{d}{dx}(k_x p_x) = p_x U_{x,1} - k_x p_x ,$$

che sarà certo più efficace di $U_{x,1}$ (v. n. 2) se

$$k_x p_x = 1, \qquad p_x = \int^x \frac{dx}{k_x} = S_x .$$

Si ha, così, un secondo indice, più efficace di $U_{x,1}$:

$$U_{x,2} = S_x U_{x_0 1} - 1. \tag{2'}$$

Applicando lo stesso procedimento ad $U_{x,2}$, si perverrà a

$$U_{x,3} = S_{x,2} U_{x,2} - 1 ; \qquad S_{x,2} = \int^x \frac{dx}{k_x S_x} = \log S_x + \text{cost} \tag{3'}$$

più efficace di $U_{x,2}$; ecc. Si noti che anche $S_{x,2}$ diverge.

9. Assumendo $k_x = 1$, la catena di indici diviene

$$\sigma_{x_0 1} = \sigma_x , \qquad \sigma_{x,3} = \log x \cdot \sigma_{x,2} - 1$$
$$\sigma_{x,2} = x\sigma_x - 1, \qquad \sigma_{x,4} = \log_2 x \cdot \sigma_{x,3} - 1, \quad \text{ecc.}$$

Applichiamo questi criteri ad $a_x = e^{-x^p}$, per cui $\sigma_x = px^{p-1}$. Il 1° criterio dice che v'è convergenza nel caso (ovvio) $p \geq 1$; formando, allora, $x\sigma_x = px^p$, il 2° criterio dirà che si verifica convergenza per $p > 0$ e divergenza, com'è evidente, per $p \leq 0$.

10. Come a n. 6, osserveremo che la condizione $\sigma_{x,h} \geq \varepsilon$ esige che sia $\sigma_x > 0$ e quindi a_x decrescente. Se l'integrale di a_x converge, ma a_x non decresce, nessun criterio $\sigma_{x,h}$ potrà dimostrarne la convergenza.

In generale, il moltiplicatore k_x conduce a

$$\sigma_x \geq \frac{k_x' + \varepsilon}{k_x}, \qquad \frac{a_x}{C} \leq \alpha_{x,\varepsilon} \qquad [C = \text{costante}]$$

con

$$\alpha_{x,\varepsilon} = e^{-\int^x \frac{k_x' + \varepsilon}{k_x} dx} = \frac{1}{k_x e^{\varepsilon S_x}}, \qquad S_x = \int^x \frac{dx}{k_x}.$$

La funzione $\alpha_{x,\varepsilon}$ *associata* a k_x, è precisamente la trasformata nel continuo di $\alpha_{n,\varepsilon}$ (n. 6), in quanto

$$\prod_{i=}^{n} \left(1 + \frac{\varepsilon}{k_i}\right) \quad \text{diviene} \quad \prod_{x_0}^{x} \left(1 + \frac{\varepsilon dx}{k_x}\right) = e^{\int_x^x \frac{\varepsilon dx}{k_x}}$$

(esprimendo il limite del prodotto, che può chiamarsi *prodotto-integrale,* con l'integrale ordinario). *L'integrale di* $\alpha_{x,\varepsilon}$*, qualunque sia* k_x*, è convergente per* $\varepsilon > 0$; e la funzione a_x, oltrechè decrescente, risulta (a meno di un fattore) minorante di $\alpha_{x,\varepsilon}$.

L'indice $\sigma_{x,1}$ dà

$$\sigma_x \geq \varepsilon; \qquad \alpha_{x,\varepsilon} = \left(\frac{1}{e^\varepsilon}\right)^x$$

e le curve associate $y = \alpha_{x,\varepsilon}$ sono curve esponenziali decrescenti. Per $\sigma_{x,2}$ è

$$\sigma_x \geq \frac{1+\varepsilon}{x}; \qquad \alpha_{x,\varepsilon} = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$$

e le curve associate sono iperboli (generalizzate). Gli indici $\sigma_{x,3}$, $\sigma_{x,4}$, ecc. conducono a

$$\sigma_x \geq \frac{1}{x} + \frac{1+\varepsilon}{x \log x}; \qquad \alpha_{x,\varepsilon} = \frac{1}{x(\log x)^{1+\varepsilon}}$$

$$\sigma_x \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{x \log x} + \frac{1+\varepsilon}{x \log x \log_2 x}; \qquad \alpha_{x,\varepsilon} = \frac{1}{x \log x (\log_2 x)^{1+\varepsilon}}; \text{ ecc.}$$

Risulta, da quanto precede, che gli integrali

$$\int^\infty \frac{dx}{e^{\varepsilon x}}, \qquad \int^\infty \frac{dx}{x^{1+\varepsilon}}, \qquad \int^\infty \frac{dx}{x(\log x)^{1+\varepsilon}}, \qquad \int^\infty \frac{dx}{x \log x (\log_2 x)^{1+\varepsilon}}, \text{ ecc.}$$

sono tutti convergenti per $\varepsilon > 0$ e divergenti per $\varepsilon = 0$; onde si comportano egualmente le serie considerate al n. 5 (e studiate allora direttamente).

I criteri ora indicati permettono di giudicare della convergenza senza esprimere la primitiva di a_x in funzione di x e cercarne poi il limite per x infinito; e perciò sono utili quando la primitiva sia di laboriosa determinazione e di struttura complicata, o non sia esprimibile in forma finita con funzioni elementari. È, questo, il caso della funzione $e^{- \; p}$ considerata al n. 9.