Bollettino
Unione Matematica Italiana

Vincenzo G. Cavallaro

Funzioni continue e proposizioni geometriche concomitanti. Estensione del teorema di Pitagora

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.2, p. 174–177.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_174_1>

Funzioni continue e proposizioni geometriche concomitanti. Estensione del Teorema di Pitagora.

Nota di VINCENZO G. CAVALLARO (a Cefalù).

Sunto. - *L'Autore richiama, ampliandola, una sua Nota comparsa nel 1937 nel » Bollettino di Matematica ». Tale Nota estende e generalizza quella recente di* M. CRENNA, « Estensione del Teorema di Pitagora », *(« Bollett. della U. M. I. », N. 4, 1949) e l'altra precedente, d'ugual titolo, di* G. CANDIANI, *(« Periodico di Mat. », N. 5, 1935).*

1. Siano $(a, b, c, \dots l, \omega)$ n numeri reali positivi $(n > 2)$ e sia ω maggiore di ciascuno dei rimanenti. La funzione continua

$$f(x) = \left(\frac{a}{\omega}\right)^x + \left(\frac{b}{\omega}\right)^x + \left(\frac{c}{\omega}\right)^x + \dots + \left(\frac{l}{\omega}\right)^x \tag{1}$$

considerata nell'intervallo $(0, \infty)$ prende agli estremi di esso i valori $n-1$ e 0, massimo e minimo rispettivameute, ed è ivi decrescente. Esiste dunque un certo numero positivo β, dell'intervallo considerato, per il quale $f(\beta)=1$ e quindi

$$\omega^\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + \dots + l^\beta.$$

Geometricamente:

TEOREMA. - *Per ogni poligono piano o gobbo di* n *lati in cui un lato* ω *sia maggiore di ciascuno degli* n — 1 *rimanenti* a, b, c, ..., l, *esiste un numero positivo* β *per il quale*

$$\omega^\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + + \dots l^\beta.$$

2. CASO PARTICOLARE ($n=3$). - Per il caso più semplice, $n=3$, si ha, essendo a. b, c le misure dei lati di un triangolo ABC con $a > b$, $a > c$:

$$(x) \qquad a^\beta = b^\beta + c^\beta.$$

Siccome è noto che un triangolo è ottusangolo, rettangolo, od acutangolo quando sia rispettivamente $a^2 >, =, < b^2 + c^2$, così ne segue, in virtù della (x), che se il triangolo ABC è ottusangolo in A, dev'essere β un numero dell'intervallo $(1, 2)$, estremi esclusi; se rettangolo in A, $\beta=2$; se acutangolo in A, β dev'essere un numero dell'intervallo $(2, \infty)$ esclusi gli estremi.

3. Se consideriamo la funzione continua

$$(2) \qquad f(x) = \left(\frac{\omega}{a}\right)^x + \left(\frac{\omega}{b}\right)^x + \left(\frac{\omega}{c}\right)^x + \dots + \left(\frac{\omega}{l}\right)^x$$

ancora nell'ipotesi (n. 1) di $\omega > a, b, c, \dots, l$, vediamo ch'essa prende agli estremi dell'intervallo $(0, \infty)$ i valori $n-1$ e ∞, minimo e massimo, rispettivamente, ed è crescente nell'intervallo medesimo. Se dunqne diamo un numero positivo $k > n-1$, esiste in corrispondenza un numero positivo γ, dell'intervallo considerato, per il quale $f(\gamma)=k$ e quindi

$$k \cdot \frac{1}{\omega^\gamma} = \frac{1}{a^\gamma} + \frac{1}{b^\gamma} + \frac{1}{c^\gamma} + \dots + \frac{1}{l^\gamma}.$$

Geometricamente:

TEOREMA. - *Per ogni poligono piano o gobbo di* n *lati in cui un lato* ω *sia maggiore di ciascuno degli* n — 1 *rimanenti* a, b, c, ..., l. *fissato un numero positivo* k > n — 1, *esiste in corrispondenza un numero positivo* γ *per il quale*

$$k \cdot \frac{1}{\omega^\gamma} = \frac{1}{a^\gamma} + \frac{1}{b^\gamma} + \frac{1}{c^\gamma} + \dots + \frac{1}{l^\gamma}.$$

4. Il caso $n = 3$. – In particolare nel triangolo ABC ch'abbia (n. 2) $a > b$, $a > c$, è, per $k = 3$:

$$(y) \qquad 3 \cdot \frac{1}{a^{\gamma}} = \frac{1}{b^{\gamma}} + \frac{1}{c^{\gamma}} .$$

5. Le cose procedono conformemente mettendoci ora nell'opposta ipotesi di ω minore di ciascuno degli $n - 1$ numeri $a, b, c, \ldots, l$. Se dunque nella (1) ω è minore di $a, b, c, \ldots, l$, la $f(x)$ prende agli estremi dell'intervallo $(0, \infty)$ i valori $n - 1$ e ∞, minimo e massimo, rispettivamente, ed è crescente nell'intervallo medesimo. Fissato dunque un numero positivo $h > n - 1$, esiste in corrispondenza un numero positiso λ, dell'intervallo considerato, per il quale $f(\lambda) = h$ e quindi

$$h \cdot \omega^{\lambda} = a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \ldots + l^{\lambda} .$$

Geometricamente:

Teorema. – *Per ogni poligono piano o gobbo di* n *lati in cui un lato* ω *sia minore di ciascuno degli* n — 1 *rimanenti* a, b. c, ..., l, *fissato un numero positiro* h > n - 1, *esiste in corrispondenza un numero positivo* λ *per il quale*

$$h \cdot \omega^{\lambda} = a^{\lambda} + b^{\lambda} + c^{\lambda} + \ldots + l^{\lambda} .$$

6. Il caso $n = 3$. – Per un triangolo ABC in cui sia $a < b$ $a < c$, è, per $h = 3$,

$$(z) \qquad 3 \cdot a^{\lambda} = b^{\lambda} + c^{\lambda}$$

7. Infine consideriamo la funzione continua (2) nell'ipotesi di $\omega < a, b, c, \ldots, l$. La funzione prende agli estremi dell'intervallo $(0, \infty)$ i valori $n - 1$ e 0, massimo e minimo. rispettivamente, ed è decrescente nell'intervallo medesimo. Esiste dunque un numero positivo ξ dell'intervallo considerato, per il quale $f(\xi) = 1$ e quindi

$$\frac{1}{\omega^{\xi}} = \frac{1}{a^{\xi}} + \frac{1}{b^{\xi}} + \frac{1}{c^{\xi}} + \ldots + \frac{1}{l^{\xi}}$$

o anche

$$\omega^{-\xi} = a^{-\xi} + b^{\xi} + c^{-\xi} + \ldots + l^{-\xi},$$

l' esponente essendo ora un numero dell' intervallo $(-\infty, 0)$, estremi esclusi.

Geometricamente:

Teorema. – *Per ogni poligono piano o gobbo di* n *lati in cui un lato* ω *sia minore degli* n — 1 *rimanenti* a, b, c, ..., l, *esiste un numero* $-\xi$ *entro l'intervallo* $(-\infty, 0)$ *per il quale*

$$\omega^{-\xi} = a^{-\xi} + b^{-\xi} + c^{-\xi} + \ldots + l^{-\xi}.$$

8. Il caso $n = 3$. - In particolare per un triangolo ABC in cui sia $a < b$, $a < c$, è

$$a^{\bar{\xi}} = b^{\bar{\xi}} + c^{\bar{\xi}} \tag{u}$$

l'esponente essendo un numero dell'intervallo $(-\infty, 0)$, estremi esclusi.

Dai nn. 2 e 8 riguardanti, in particolare, il triangolo, ricaviamo il seguente teorema che enuncieremo nell'istessa forma compendiosa datagli dal prof. Crenna:

« *Una conveniente potenza del lato maggiore d'un triangolo qualunque è uguale alla somma delle potenze simili dei rimanenti lati e l'esponente è compreso tra* 1 *e* 2 *per i triangoli ottusangoli e tra* 2 *e* $+\infty$ *per i triangoli acutangoli. Una conveniente potenza del lato minore d'un triangolo qualunque (con l'esponente compreso tra* $-\infty$ *e* 0*) è uguale alla somma delle potenze simili dei rimanenti lati* ».

Diciamo infine che il Crenna nella sua Nota sviluppa in modo differente la dimostrazione di questo teorema accompagnandola da considerazioni assai istruttive.