Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tullio Viola

# Su un problema metrico relativo alle superficie quadrabili

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **5** (1950), n.2, p. 109–120.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_2_109_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

## Su un problema metrico relativo alle superficie quadrabili.

Nota di TULLIO VIOLA (a Roma).

**Sunto.** - *Si trova al n. 1 della Nota stessa.*

**1.** In una precedente Nota dal titolo *Un problema metrico relativo agli insiemi di punti, nel piano o nello spazio* (questo « Bollettino »), ho affermato la possibilità di costruire un particolare esempio di dominio tridimensionale $E$, semplicemente connesso e limitato da una superficie quadrabile $S = FE$, e poi di scegliere due punti $A$, $B$ estranei ad $E$ in modo da soddisfare alla seguente condizione:

*se si congiungono* A, B *mediante una generica curva semplice e rettificabile* $\gamma$ *di* PEANO-JORDAN *totalmente estranea ad* E *e si deforma poi* $\gamma$ *con continuità, in modo da farne tendere la lunghezza* $L(\gamma)$ *al proprio estremo inferiore* $\Lambda$, *la curva* $\gamma$ *tende ad una ben determinata curva limite* $\Gamma$, *tale che* $L(\Gamma) < \Lambda$.

Mi propongo, in questa nota, di dare l'effettiva costruzione d'un tale esempio, avendo anche cura che la superficie $S$ debba risultare dotata di piano tangente variabile con continuità, in ogni punto estraneo alla curva d'accumulazione $\Gamma$ (e magari anche d'elementi differenziali d'ordine prefissato elevato a piacere).

**2.** Prefissiamo una serie geometrica $\sum_{1}^{\infty}{}_n \varepsilon_n \left(\text{con } \varepsilon_n = \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$ di somma positiva $\varepsilon < \frac{1}{3}$ e piccola a piacere (sufficientemente piccola, in ogni caso, per quanto occorrerà nel seguito). Prefissiamo, anche a piacere, una terna cartesiana ortogonale $0xyz$ e indichiamo, per ogni valore dell'indice $n = 1, 2, 3, \ldots$, con $U_n$ il *dominio piano* costituito da tutti i punti del piano $z = 0$, che

*a*) non sono esterni a tutti i $2^{n-1}$ semicerchi di equazioni:

$$y \geq \varepsilon_n, \quad \left(x - \frac{h}{2^n}\right)^2 + (y - \varepsilon_n)^2 = \frac{1}{2^{2n}} \quad (h = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2^n - 1),$$

*b*) non sono interni ad alcuno dei $2^n$ semicerchi di equazioni:

$$y \geq \varepsilon_n, \quad \left(x - \frac{k}{2^{n+1}}\right)^2 + (y - \varepsilon_n)^2 = \frac{1}{2^{2(n+1)}} \quad (k = 1, 3, 5, 7, \ldots, 2^{n+1} - 1).$$

Facciamo ruotare i domini $U_1$, $U_3$, $U_5$, ..., $U_{2n+1}$, ... tutti d'uno stesso angolo $180^\circ - \alpha$ ($\alpha$ positivo e arbitrariamente piccolo (1)) intorno all' asse $x$ (e nel verso individuato dall' angolo retto $\widehat{yz}$). Tali domini descrivono, nella rotazione, certi *domini tridimensionali* che indicheremo rispettivamente con $D_1$, $D_3$, $D_5$, ..., $D_{2n+1}$, ... .

Siano poi $U_2'$, $U_4'$, $U_6'$, ..., $U_{2n}'$, ... i domini piani simmetrici degli $U_2$, $U_4$, $U_6$, ..., $U_{2n}$, ... rispetto all' asse $x$. Facciamo analogamente ruotare questi domini $U_{2n}'$ tutti dello stesso angolo $-180^\circ + \alpha$ in-

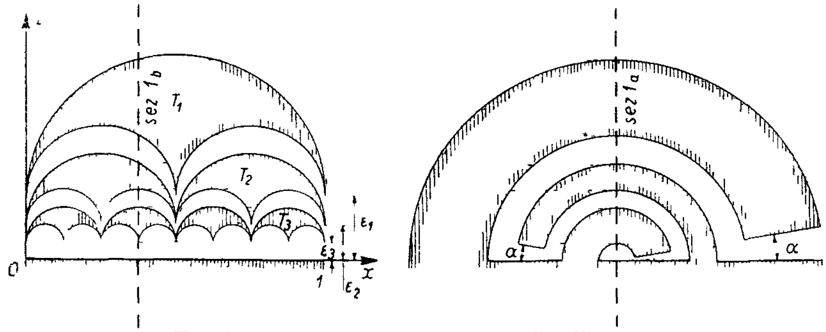


Fig. 1a Fig. 1b

torno all' asse $x$ e indichiamo con $D_{2n}$ i domini tridimensionali descritti, in tale rotazione, rispettivamente dagli $U_{2n}'$. Sia inoltre $D^0$ il parallelepipedo rettangolo

$$0 \leq x \leq 1, \qquad -\frac{1}{2} - \varepsilon_1 \leq y \leq \frac{1}{2} + \varepsilon_1, \qquad -1 \leq z \leq 0.$$

L' insieme

$$E^* = D^0 + D_1 + D_2 + \dots + D_n + \dots$$

è un dominio semplicemente connesso e limitato da una superficie quadrabile $FE^*$, la quale può pensarsi ottenuta riunendo insieme un' infinità numerabile di porzioni regolari, le une piane, le altre toriche. S' ottiene precisamente, con un calcolo elementare, che l' area di $FE^*$ è

$$A(FE^*) = 6 + 4\varepsilon + \frac{180 - \alpha}{360} \pi (3 + 2\pi\varepsilon),$$

e può quindi rendersi minore di $6 + \frac{180 - \alpha}{120} \pi + \sigma$ (ove $\sigma$ sia prefissato piccolo a piacere), purchè si supponga $\varepsilon$ scelto sufficientemente piccolo. La fig. 1*a* rappresenta la sezione del dominio parziale $D^0 + D_1 + D_2 + D_3$, col piano $y = 0$ (sono ivi indicate con $T_n$

(1) Per quanto segue, è largamente sufficiente assumere $\alpha = 1^\circ$.

le sezioni dei domini $D_n$ rispettivamente). La figura 1*b* rappresenta invece la sezione dello stesso dominio parziale, col piano $x = \frac{3}{8}$.

**3.** Indichiamo ora con $\omega$ una generica curva semplice di PEANO-JORDAN, rettificabile e totalmente estranea al dominio $E^*$, unente un punto $M$ del piano $x = 0$ con uno $N$ del piano $x = 1$ e proponiamoci di calcolare, almeno approssimativamente, il limite minimo $\Lambda^*$ della lunghezza $L(\omega)$, per $\omega$ tendente al segmento $[0,1]$ dell'asse $x$ (²).

Dimostreremo che, prefissato un numero $\eta > 0$ piccolo a piacere $\left(e < \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \backsim 0{,}2854\right)$, è sempre possibile scegliere $\varepsilon$ tanto piccolo che risulti

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \eta < \Lambda^* < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

(e quindi anche $\Lambda^* > 1$).

A scopo dimostrativo ci converrà, per ogni curva $\omega$, considerare la superficie che s'ottiene facendo ruotare la $\omega$ intorno all'asse $x$, nonchè l'intersezione $\omega' = \widehat{M'N'}$ di tale superficie col piano $y = 0$. Tale intersezione sarà chiamata la *proiezione* della $\omega$ sul detto piano: essa è ancora una curva rettificabile di PEANO-JORDAN, e i suoi punti si possono far corrispondere univocamente ai valori dello stesso parametro $t$, cui s'intende riferita la curva $\omega$ (³).

**4.** Più precisamente dimostreremo quanto segue.

Consideriamo la curva $\bar{\omega}_1'$ disegnata in fig. 2, come la proiezione, sul piano $y = 0$, d'una curva $\bar{\omega}_1$ ad essa uguale, complanare

(²) Per tutta chiarezza, diciamo come si debba intendere questo limite minimo. Sia $\delta$ la massima delle distanze dei punti di $\omega$ dall'asse $x$ e sia $O$ l'operazione che consiste nel calcolare $L(\omega)$.

Ordiniamo l'insieme $[O]$ delle operazioni $O$, corrispondenti a tutte le possibili $\omega$, con la convenzione: considerata una qualunque operazione $O$, chiameremo *seguente* alla $O$, ogni altra operazione $O_1$ che si applichi ad una curva $\omega_1$ tale che la relativa distanza $\delta_1$ sia $< \delta$. L'ordinamento, così definito, dell'insieme $[O]$, soddisfa ai postulati enunciati da M. PICONE nelle *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, (Catania 1923), vol. I, p. 9, cioè $L(\omega)$ risulta una *variabile ordinata*. Orbene $\Lambda^*$ è il limite minimo di tale variabile ordinata. Con le notazioni qui introdotte, possiamo anche scrivere $\Lambda^* = \lim\limits_{\delta \to 0}' L(\omega)$.

(³) $\omega'$ può evidentemente esser dotata di punti multipli. Anzi interi archi di $\omega'$ posson esser percorsi più volte; oppure un unico punto di $\omega'$ può corrispondere ai valori di $t$ d'un intero intervallo. Dunque la corrispondenza, qui accennata, non è in generale biunivoca.

all'asse $x$ e contenuta nel diedro d'ampiezza $\alpha$:

$$[1] \qquad 0 \leq z \leq y \operatorname{tag} \alpha \ (^4).$$

Si riconosce facilmente che $L(\bar{\omega}_1)$ è l'estremo inferiore delle lunghezze $L(\omega)$ di tutte le curve $\omega$, le cui proiezioni hanno, per ogni $x$ dell'intervallo [0,1], quota $z$ sempre minore o al più uguale alla

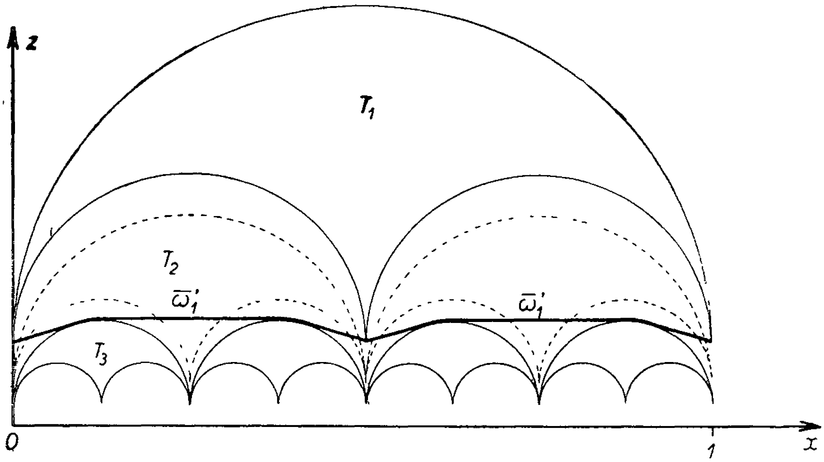


Fig. 2

minima delle quote dei punti di $T_1$, pur non penetrando nell'interno d'alcuno dei domini $T_3$, $T_4$, $T_5$, ...; che inoltre $\bar{\omega}_1$ è curva d'accumulazione di siffatte curve $\omega$, le cui lunghezze tendono ad $L(\bar{\omega}_1)$.

Riducendo la $\bar{\omega}_1'$, mediante due omotetie d'ugual rapporto $\frac{1}{2}$ e aventi i centri rispettivamente nei punti (0, 0, 0), (1, 0, 0,). otterremo altre due curve che, riunite insieme, formeranno una nuova curva $\bar{\omega}_2'$ e questa considereremo come proiezione, sul piano $y = 0$, d'una curva $\bar{\omega}_2$ ad essa uguale, complanare all'asse $x$ contenuta nel diedro d'ampiezza $\alpha$:

$$[2] \qquad 0 \leq z \leq y \operatorname{tag} (180^\circ - \alpha) \ (^5).$$

Si riconosce che $L(\bar{\omega}_2)$ è l'estremo inferiore delle lunghezze $L(\omega)$ di tutte le curve $\omega$, le cui proiezioni hanno, per ogni $x$ di [0,1],

(4) È ovviamente inteso $y > 0$. Il semipiano contenente $\bar{\omega}_1$ e uscente dall'asse $x$, può essere uno qualunque (a piacere) di quelli contenuti in detto diedro.

(5) Qui, invece, è inteso $y < 0$. Segue un'analoga osservazione a quella della nota precedente.

quota $z$ sempre minore o, al più, uguale alla minima delle quote dei punti di $T_2$, pur non penetrando nell'interno d'alcuno dei domini $T_4$, $T_5$, $T_6, \ldots$; che inoltre $\bar{\omega}_2$ è curva d'accumulazione di siffatte curve $\omega$, le cui lunghezze tendono ad $L(\bar{\omega}_2)$.

Così proseguiremo indefinitamente. In generale, supposta costruita una certa $\bar{\omega}_n'$ ($n$ intero qualunque $> 1$), mediante due omotetie d'ugual rapporto $\frac{1}{2}$ e aventi i centri rispettivamente nei punti $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, otterremo altre due curve che, riunite insieme, formeranno una nuova curva $\bar{\omega}'_{n+1}$ e questa considereremo come proiezione, sul piano $y = 0$, d'una curva $\bar{\omega}_{n+1}$ ad essa uguale, complanare all'asse $x$ e contenuta nel diedro [1] o, rispettivamente, nel diedro [2], a seconda che $n$ è pari o dispari [6]. Sarà $L(\bar{\omega}_{n+1})$ l'estremo inferiore delle lunghezze $L(\omega)$ di tutte le curve $\omega$, le cui proiezioni hanno, per ogni $x$ di $[0,1]$, quota $z$ sempre minore o uguale alla minima delle quote dei punti di $T_{n+1}$, pur non penetrando nell'interno d'alcuno dei domini $T_{n+3}$, $T_{n+4}$, $T_{n+5}, \ldots$; che inoltre $\bar{\omega}_{n+1}$ è curva d'accumulazione di siffatte curve $\omega$, le cui lunghezze tendono appunto ad $L(\bar{\omega}_{n+1})$.

Si riconosce subito che

$$L(\bar{\omega}_1) = L(\bar{\omega}_2) = \ldots = L(\bar{\omega}_n) = \ldots .$$

Approssimando le $\bar{\omega}_n$, sia come curve (cioè come insiemi di punti), sia in lunghezza (gli scarti d'approssimazione tendendo a zero al divergere di $n$), ciascuna con una particolare curva $\omega_n$ (cfr. la nota [12] all'art. preced.), otterremo una certa successione $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$. Dimostreremo che

$$\lim_{n \to \infty} L(\omega_n) = \lim_{\delta \to 0}{}' \, L(\omega) = \Lambda^*$$

e con ciò risulterà senz'altro dimostrato (come un calcolo semplice ed elementare permette di riconoscere fin d'ora) quanto s'è affermato al principio del n. 3.

Sostanzialmente non usciremo, neppure nei ragionamenti seguenti, dall'ambito della geometria elementare.

5. Ai fini della valutazione di $\Lambda^*$, si riconosce facilmente che è lecito limitarsi a considerare soltanto curve $\omega$ (n. 3) che siano *simmetriche rispetto al piano* $x = \frac{1}{2}$ ed anche, di conseguenza, che abbiano un sol punto in comune con quel piano. Infatti siano $P$ il

[6] Cfr. la seconda parte della nota [4].

primo punto (nel verso $\widehat{MN}$), $Q$ l'ultimo, che $\omega$ ha in comune col piano $x=\frac{1}{2}$. Se è $L(\widehat{MP})\leq L(\widehat{NQ})$, si consideri l'arco $\widehat{M_0P}$ simmetrico di $\widehat{MP}$ rispetto al piano $x=\frac{1}{2}$. Si avrà $L(\omega)\geq L(\widehat{MP})+$ $+L(\widehat{PM_0})$. È chiaro che la possibilità di sostituire $\omega$ con la somma $\widehat{MP}+\widehat{PM_0}$, dipende essenzialmente dal fatto che $E^*$ *è simmetrico rispetto al piano* $\mathrm{x}=\frac{1}{2}$. Analogamente si ragiona, se è $L(\widehat{MP})\geq L(\widehat{NQ})$.

Alla supposta simmetria di $\omega$ rispetto al piano $x=\frac{1}{2}$. corrisponderà la simmetria di $\omega'$ rispetto alla retta $x=\frac{1}{2}$ (7) ed anche che $\omega'$ abbia un solo punto in comune con quella retta.

Osserviamo ora che il dominio ottenibile per chiusura della differenza $E^*-D_1$, è non solo simmetrico rispetto al piano $x=\frac{1}{2}$, ma anche che la sua *prima* metà, cioè la parte di tale dominio ch'è compresa fra i due piani $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, è simmetrica rispetto al piano $x=\frac{1}{4}$ $\left(\text{e quindi anche che la sua } \textit{seconda} \text{ metà, cioè la parte ch'è compresa fra i due piani } x=\frac{1}{2},\ x=1, \text{ è simmetrica rispetto al piano } x=\frac{3}{4}\right)$. Considerando anche la speciale conformazione di $D_1$, deduciamo che, se s'impone alla curva $\omega$ la condizione che la sua proiezione $\omega'$ abbia, per ogni $x$ dell'intervallo $[0,1]$, quota $z$ sempre minore o uguale alla minima delle quote dei punti di $T_1$ (cfr. n. 4), è lecito supporre (come un ragionamento analogo a quello precedente permette facilmente di riconoscere) non solo che $\omega$ sia simmetrica rispetto al piano $x=\frac{1}{2}$, ma anche che la *prima* metà di $\omega$ sia simmetrica rispetto al piano $x=\frac{1}{4}$, e che la *seconda* metà di $\omega$ sia simmetrica rispetto al piano $x=\frac{3}{4}$ $\left(\text{ed anche, di conseguenza, che } \omega \text{ abbia un sol punto in comune con ciascuno dei piani } x=\frac{1}{4},\ x=\frac{3}{4}\right)$.

(7) S'intende: nel piano $y=0$. Per indicare le particolarità del comportamento d'una qualunque proiezione $\omega'$, s'applicherà (all'occorrenza) la terminologia della geometria analitica piana.

Ad analoghe proprietà di simmetria soddisferà corrispondentemente la proiezione $\omega'$, sotto l'indicata condizione restrittiva imposta alla $\omega$.

Così possiamo proseguire indefinitamente. In generale osserviamo (ragionando per induzione) che il dominio

$$(E^* - D_1 - D_2 - \dots - D_n) + F(E^* - D_1 - D_2 - \dots - D_n)$$

(qualunque sia $n > 1$) gode non solo di tutte le proprietà di simmetria del dominio

$$(E^* - D_1 - D_2 - \dots - D_{n-1}) + F(E^* - D_1 - D_2 - \dots - D_{n-1}),$$

ma anche della nuova proprietà: che la parte di esso, ch' è compresa fra una qualunque coppia di piani (cfr. n. 2, *b*)

$$x = \frac{k-1}{2^{n+1}}, \quad x = \frac{k+1}{2^{n+1}} \qquad (\text{con } k = 1, 3, 5, 7, \dots, 2^{n+1} - 1),$$

è simmetrica rispetto al piano $x = \frac{k}{2^{n+1}}$. Considerando anche la speciale conformazione di $D_n$, deduciamo che, se s' impone alla curva $\omega$ la condizione che la sua proiezione $\omega'$ abbia, per ogni $x$ di $[0,1]$, quota $z$ sempre minore o al più uguale alla minima delle quote dei punti di $T_n$, è lecito supporre che la parte di $\omega$ compresa fra una qualunque delle suddette coppie di piani, sia anch' essa simmetrica rispetto al corrispondente piano $x = \frac{k}{2^{n+1}}$ [8] $\left(\text{ed anche, di conseguenza, che } \omega \text{ abbia un sol punto in comune con ciascuno dei piani } x = \frac{k}{2^{n+1}}\right)$ ecc.

**6.** Per il calcolo di $\Lambda^*$, è lecito limitarsi a considerare curve $\omega$ tali che la loro proiezione $\omega'$ abbia, per ogni $x$ dell' intervallo $[0,1]$, quota $z$ sempre minore o uguale alla minima delle quote dei punti di $T_1$. Supponendo che una curva siffatta soddisfi alle pro-

[8] Si tenga ben presente che la condizione ora imposta alla $\omega$, implica necessariamente l'analoga condizione: che la proiezione $\omega'$ abbia, per ogni $x$ di $[0,1]$, quota $z$ sempre minore o uguale alla minima delle quote dei punti d'ogni $T_i$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Dunque è lecito supporre che $\omega$ soddisfi alle analoghe proprietà di simmetria relative a tutti i domini

$$(E^* - D_1 - D_2 - \dots - D_i) + F(E^* - D_1 - D_2 - \dots - D_i),$$

con $i = 1, 2, \dots, n-1$.

prietà di simmetria indicate al n. precedente, sarà sufficiente analizzare la sola porzione $\omega_{(1)}$ di $\omega$, compresa fra i piani $x=0$, $x=\frac{1}{4}$. Sia $\omega'_{(1)}$ la corrispondente porzione di $\omega'$, dunque la proiezione di $\omega_{(1)}$ sul piano $y=0$. Siano inoltre $P$ l'estremo di $\omega_{(1)}$ sul piano $x=\frac{1}{4}$, $P'$ la proiezione di $P$ sul piano $y=0$ $\left(\text{dunque l'estremo di } \omega'_{(1)} \text{ sulla retta } x=\frac{1}{4}\right)$.

Se $\omega'_{(1)}$ non penetra nell'interno di nessuno dei domini $T_2$, $T_3$, ..., è $L(\omega) \geq L(\bar{\omega}_1)$ (come abbiamo già osservato al n. 4). In caso contrario, supponiamo per es. che $\omega'_{(1)}$ penetri nell' interno di $T_2$. È chiaro che $\omega'_{(1)}$ non potrà allora penetrare nell' interno d' alcuno dei domini $T_4$, $T_5$, $T_6$, ..., senza penetrare anche nell' interno di $T_3$: facciamo dunque anche l'ipotesi che $\omega'_{(1)}$ penetri nell'interno di $T_3$. In tale ipotesi dovrà esistere, su $\omega'_{(1)}$, un arco parziale $\widehat{R'S'}$, ogni punto del quale non sia interno al cerchio

$$[3] \qquad \left(x-\frac{1}{8}\right)^2+(z-\varepsilon_3)^2=\frac{1}{8^2},$$

nè esterno al cerchio

$$[4] \qquad \left(x-\frac{1}{8}\right)^2+(z-\varepsilon_2)^2=\frac{1}{8^2},$$

e inoltre:

*a*) $R'$ appartenga alla semicirconferenza del cerchio [3] per la quale è $z>\varepsilon_3$, $S'$ appartenga invece alla semicirconferenza del cerchio [4] per la quale è $z>\varepsilon_2$;

*b*) i punti di $\omega'_{(1)}$ immediatamente precedenti [o seguenti] $R'$ (nel verso $\overrightarrow{M'P'}$) siano interni a $T_3$, mentre quelli immediatamente seguenti [o rispettivamente precedenti] $S'$, siano interni a $T_2$. Per fissar le idee, supponiamo per es. d'escludere il caso qui indicato nelle parentesi quadre (9).

Indichiamo con $R$ il primo punto di $\omega_{(1)}$ (nel verso $\overrightarrow{MP}$) avente $R'$ per proiezione, con $S$ l'ultimo punto avente $S'$ per proiezione (3), con $R_1'$ il simmetrico di $R'$ rispetto alla retta $x=\frac{1}{8}$ e distinguiamo i due sottocasi seguenti.

p) *L'ascissa* x *di* S' *sia maggiore di quella di* R$_1$'. Allora l'arco $\widehat{RP}$ di $\omega_{(1)}$ è certamente più lungo dell'arco $\widehat{RP_1}$ (compla-

(9) Nel caso indicato nelle parentesi quadre, si ragionerà in modo perfettamente analogo.

nare con l'asse $x$), di cui in fig. 3 è disegnata la proiezione $\widehat{R'P_1'}$ ([10]) esso può quindi esser sostituito da tale arco.

q) *L'ascissa* x *di* S' *sia minore o uguale a quella di* $R_1'$. Allora l'arco $\widehat{MS}$ di $\omega_{(1)}$ è certamente più lungo dell'arco $\widehat{M_1S}$

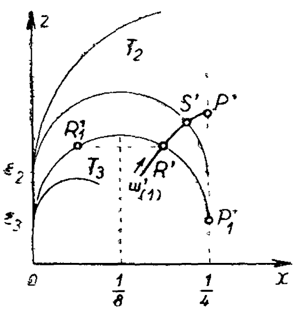


Fig. 3

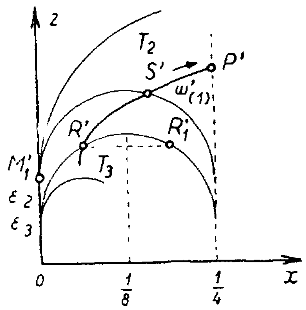


Fig. 4

(complanare con l'asse $x$), di cui in fig. 4 è disegnata la proiezione $\widehat{M_1'S'}$ ([11]): esso può quindi esser sostituito da tale arco.

Gli archi parziali di $\omega'_{(1)}$, analoghi all'arco $\widehat{R'S'}$ qui indicato, sono certamente in numero finito. È quindi ben evidente che, con un numero finito di correzioni di tipo $p$, o rispettivamente di tipo $q$, è possibile ridurre $\omega'_{(1)}$:

$r_1$) a non penetrare più nell'interno di $T_3$. In questo caso è $L(\omega) > L(\bar{\omega}_1)$ (n. 4).

$s_1$) oppure a non penetrare più nell'interno di $T_2$ ([12]). In questo caso s'ottiene, come risultato, che $\omega'$ ha, per ogni $x$ di [0,1], quota $z$ sempre minore o, al più, uguale alla minima delle quote dei punti di $T_2$. Sarà allora lecito supporre che $\omega$ soddisfi alle corrispondenti proprietà di simmetria indicate al n. 5, e perciò sarà

([10]) La fig. 3 rappresenta un esempio d'andamento della $\omega'_{(1)}$. Si osservi che $\widehat{RP_1}$ è un arco di meridiano della superficie torica descritta dalla semicirconferenza [3] e che il più breve cammino unente $R$ ad $S$, senza penetrare nell'interno di $E^*$, segue un arco di geodetica (che non è un meridiano) della detta superficie, raccordato a due segmenti aventi per estremi $R$ ed $S$ rispettivamente.

([11]) $\widehat{M_1S}$ è un arco di meridiano della superficie torica descritta dalla semicirconferenza [4], mentre il più breve cammino unente $R$ ad $S$, senza penetrare nell'interno di $E^*$, ha andamento analogo a quello indicato nella nota precedente.

([12]) Poco sopra s'era supposto che $\omega_{(1)}'$ penetrasse nell'interno di $T_2$. Si avrebbe potuto fin d'allora escludere quell'eventualità, cioè porsi direttamente nella presente.

sufficiente analizzare la sola porzione $\omega_{(2)}$ di $\omega$, compresa fra i piani $x=0$, $x=\frac{1}{8}$. All' uopo ragioneremo in modo perfettamente analogo a quanto sopra, esaminando l' andamento della proiezione $\omega'_{(2)}$, per cui distingueremo i vari casi possibili. Supporremo che $\omega'_{(2)}$ penetri nell' interno di $T_4$, oltre che di $T_3$, e faremo, secondo i casi, le correzioni analoghe alle $p$ o alle $q$, in modo da ridurre infine $\omega'_{(2)}$:

$r_2$) a non penetrare più nell' interno di $T_4$ (e quindi neppure di $T_5$, $T_6, \ldots$). In questo caso risulterà $L(\omega) > L(\bar{\omega}_2)$.

$s_2$) oppure a non penetrare più nell' interno di $T_3$. In questo caso si sarà ottenuto il nuovo risultato che $\omega'$ abbia, per ogni $x$ di $[0, 1]$, quota $z$ sempre minore o uguale alla minima delle quote dei punti di $T_3$.

Così si continuerà per un numero *finito* di successive riduzioni, poichè, come subito si riconosce, nessuna proiezione $\omega'$ può penetrare nell' interno d' infiniti domini $T_n$. È così completamente dimostrato quanto s' era affermato alla fine del n. 4. S' è anzi dimostrato, in più, che, per qualunque $\omega$, risulta $L(\omega) \geq \Lambda^*$.

7. Consideriamo i due punti $A \equiv (-\lambda, 0, 0)$, $B \equiv (\lambda, 0, 0)$, essendo $\lambda$ un numero reale positivo, prefissato arbitrariamente piccolo [13]. Una qualunque curva $\gamma$ unente $A$ con $B$ e non avente punti in comune con $E^*$ (n. 1), può pensarsi come somma di tre archi $\widehat{AM}$, $\widehat{MN}$, $\widehat{NB}$, essendo $M$ un punto del piano $x=0$, $N$ un punto del piano $x=1$. Ma $L(\widehat{AM})$ ed $L(\widehat{NB})$ sono entrambi maggiori di $\lambda$ e cioè della comune lunghezza dei segmenti di perpendicolari, abbassate rispettivamente da $A$ sul piano $x=0$ e da $B$ sul piano $x=1$ (pur potendo differire di quanto poco si vuole da tale lunghezza). Inoltre è certamente $L(\widehat{MN}) \geq \Lambda^*$, per quanto s' è visto nei nn. precedenti. Si ha dunque che, relativamente al costruito dominio $E^*$ e all' indicata scelta dei punti $A$, $B$, la curva d' accumulazione $\Gamma$ (n. 1) è unica e precisamente è il segmento $AB$, per cui $L(\Gamma) = 1 + 2\lambda$, mentre $\Lambda = \Lambda^* + 2\lambda$ epperò

$$L(\Gamma) < \Lambda.$$

[13] Per quanto qui occorre, basta che sia

$$\lambda < \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \infty\, 0{,}1427,$$

come si può facilmente verificare.

Da ultimo non resta che perfezionare la costruzione eseguita e cioè modificare leggermente il dominio $E^*$, in modo da trasformarlo in un dominio $E$ soddisfacente proprio a tutte le condizioni enunciate al n. 1 ([14]). Una tale modificazione può ottenersi facilmente arrotondando opportunamente gli spigoli, sia rettilinei che

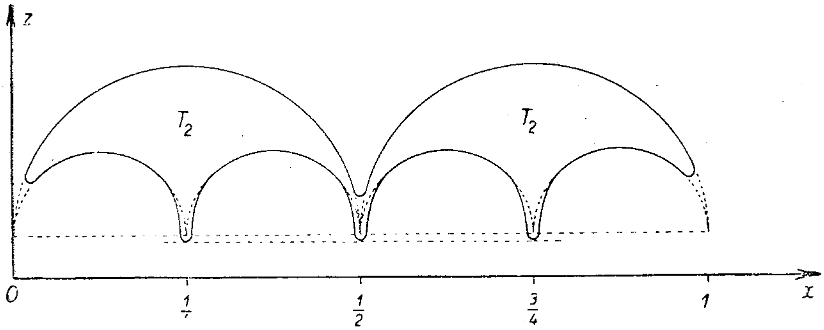


Fig. 5

circolari, lungo i quali si raccordano le varie porzioni regolari che compongono la superficie limitante $E^*$. Non è qui il caso di precisare i dettagli della modificazione e perciò ci limitiamo a dare una semplice indicazione qualitativa, mostrando in fig. 5 come possano corrispondentemente apparir modificate, nella sezione eseguita col piano $y = 0$, le cuspidi dei domini $T_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), per es. di $T_2$: come si vede, si tratta, per tali cuspidi, d'opportuni « riempimenti » e « smussamenti », tutti di dimensioni sufficientemente piccole, in modo d'assicurare che i $T_n$ si mantengano estranei l'uno all'altro e che insomma siano mantenute tutte le relazioni quantitative essenziali a ciò che abbiamo esposto nei nn. precedenti.

8. Infine si possono fare due interessanti osservazioni. La prima è che, assoggettando l'intero spazio ad una trasformazione affine del tipo $x = k\xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, è evidentemente possibile dedurre, dall'es. precedente, un altro (per il resto, del tutto analogo) esempio di dominio $E$, in corrispondenza del quale il rapporto $\Lambda/L(\Gamma)$ superi un numero naturale comunque prefissato.

La seconda osservazione concerne la possibilità di dedurre, per mezzo d'opportune trasformazioni

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \qquad y = y(\xi, \eta, \zeta), \qquad z = z(\xi, \eta, \zeta),$$

([14]) Avente anche superficie priva di punti multipli.

altri esempi di domini $E$, nei quali la curva $\Gamma$ d'accumulazione non sia un segmento, ma anzi (a prescindere ovviamente da due tratti rettilinei terminali) una linea semplice e regolare, comunque prefissata nello spazio. Non ci tratteniamo su tali esempi, che il lettore potrà del resto facilmente, dopo quanto precede, costruire da sè con un po' d'esercizio, almeno nell'ipotesi (l'unica veramente interessante) che la detta linea regolare sia priva di punti angolosi.