Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Bonferroni

Un teorema sul triangolo e il teorema di Napoleone

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 85–89.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_85_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1950.

Un teorema sul triangolo e il teorema di Napoleone.

Nota di CARLO BONFERRONI (a Firene).

Sunto. *Si dimostra che, costruiti sui lati di un triangolo tre archi capaci degli angoli* α, β, γ *(tutti e tre dalla parte esterna, o tutti e tre dalla parte del triangolo) e supposto* $\alpha+\beta+\gamma=180°$, *i centri dei tre archi formano un triangolo di angoli* α, β, γ. *Si indicano alcuni casi particolari, tra i quali (per* $\alpha=\beta=\gamma=60°$*) il «teorema di Napoleone».*

1. Nel « Bollettino » dell'U. M. I. (Vol. 1°, Serie III, 1946, pp. 43-47) il Prof. BRUSOTTI ha richiamato l'attenzione sul cosidetto « Teorema di Napoleone », indicandone interessanti interpretazioni algebriche. Leggendo quella Nota, ho notato che il suddetto teorema è caso particolare di una proposizione molto più generale: ritengo non inutile, quindi, esporla, senza soffermarmi, per ora, sulle sue interpretazioui algebriche (*).

2. *Costruiti sui lati* a, b, c *di un triangolo, ed esternamente ad esso, rispettivamente gli archi* (α), (β), (γ) *di somma* 180°, *i loro centri* C_α, C_β, C_γ *formano un triangolo di angoli rispettivamente* α, β, γ.

Dal vertice ab si conduca la parallela alla $C_\alpha C_\beta$ e si supponga che incontri ulteriormenta (α) e (β) nei punti A, B, e che questi si trovino da bande opposte di ab. Unendo A con ac e B con bc, si ottengono due rette che (essendo $\alpha + \beta < 180°$) si incontrano in un punto C dalla banda del triangolo rispetto ad AB. Nel triangolo ABC l'angolo in C è $180° - \alpha - \beta = \gamma$ e quindi, se C e il triangolo sono da bande opposte di c, il punto C cade su (γ).

Se si fa ruotare la retta AB attorno al punto ab, essa cesserà di essere parallela a $C_\alpha C_\beta$, però i punti A, B d'incontro con (α) e (β) e il punto C di (γ), costruito come sopra, formeranno sempre un triangolo di angoli α, β, γ. Ma in questo spostamento (sia nell'uno che nell' altro verso di rotazione), il segmento AB diminuisce [1]: dimi uiscono, quindi, anche AC e BC, dato che il triangolo ABC si mantiene simile a se stesso, onde anch'essi risulteranno massimi, e perciò paralleli rispettivamente a $C_\alpha C_\gamma$ e $C_\beta C_\gamma$. Ciò dimostra che il triangolo $C_\alpha C_\beta C_\gamma$ ha per angoli rispettivamente α, β, γ.

3. La disposizione degli elementi ora considerata è quella intuitivamente più semplice: occorre accertare, però, che il teorema sussiste sempre.

I diversi casi da considerare corrispondono al fatto che la parallela a $C_\alpha C_\beta$ condotta per ab può incontrare in A l' arco (α) oppure l'arco $(\alpha)_1$, condotto dalla banda del triangolo e capace del supplemento α_1 di α, arco che, con (α), completa il cerchio ($\alpha\alpha_1$). Nel 1° caso il triangolo aA è *esterno* al triangolo abc; nel 2° caso è *interno*. Lo stesso dicasi per B, che può cadere su (β) o su $(\beta)_1$, e quindi vedere b dall'esterno o dall'interno. Infine, A e B possono trovarsi da bande opposte o dalla stessa banda di ab. Indicando con « e » la posizione esterna di A o B, con « i » la posizione interna, e

(*) Una breve comunicazione in proposito è stata fatta al III Congr. dell'U. M. I, Pisa, 24-9-1948.

(1) Esso è doppio della proiezione ortogonale di $C_\alpha C_\beta$ sulla retta AB, e quindi è massimo per AB parallela a $C_\alpha C_\beta$. Questa proprietà vale anche quando A, B si trovano dalla stessa banda di ab: basta considerare AB come differenza delle distanze di A, B da ab, invece che come somma.

con « o » il punto comune ab. le possibilità da esaminare sono:

$$eoe, \quad eeo, \quad (ioi), \quad iio; \quad eoi, \quad eio, \quad ieo.$$

Abbiamo racchiuso iu parentesi il caso *ioi* perchè facili considerazioni mostrano che, a causa della condizione $\alpha + \beta < 180°$, esso non può presentarsi. Gli altri sei si rappresentano graficamente senza difficoltà.

Ne risulta che gli angoli α, β cadono in ogni caso dalla stessa banda di AB; e che, per effetto della disuguaglianza $\alpha + \beta < 180°$, si incontrano in un punto C di questa banda, dando luogo ad un triangolo ABC con l'angolo in C eguale a γ. A seconda che il lato c risulta interno a γ o al suo adiacente, il lato c sarà visto da C secondo γ o γ_1, ma in ogni caso C giacerà sul cerchio $(\gamma\gamma_1)$; il triangolo ABC, facendo ruotare AB attorno ad ab, si manterrà simile a se stesso; il massimo di AB porterà al massimo di AC e BC, e quindi, come s'è già detto al n. 2, il triangolo $C_\alpha C_\beta C_\gamma$ avrà per angoli α, β, γ. Il teorema, in conclusione. è valido in ogni caso.

4. Si può modificare la forma dell'enunciato, osservando che C_α è centro del cerchio circoscritto ad un triangolo isoscele costruito snlla base a esternamente ad abc, ed avente l'angolo al vertice eguale ad α; così per C_β e C_γ. Si potrà dire, allora, che *costruiti questi tre triangoli isosceli, se* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ *i centri dei cerchi ad essi circoscritti determinano un triangolo di angoli* α, β, γ.

5. Teorema di Napoleone. – Se, in particolare, si pone $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, i suddetti triangoli isosceli divengono equilateri, e quindi i loro centri determinano ancora un triangolo equilatero. È, questo, il teorema detto « di Napoleone ». In esso i tre triangoli equilateri, che rendono così suggestivo l'enunciato, non sono essenziali, ma rappresentano soltanto un mezzo — uno dei tanti possibili — per costruire i centri degli archi capaci di 60°.

6. *Costruiti sui lati* a, b, c *di un triangolo, ed internamente ad esso, gli archi capaci degli angoli* α, β, γ *di somma* 180°, *i loro centri* C_α, C_β, C_γ *determinano un triangolo di angoli* α, β, γ.

Il teorema di n. 2 vale, cioè, anche con archi costruiti dalla parte interna del triangolo. Per dimostrarlo, dovremo anche ora considerare i casi (con le stesse notazioni di n. 3)

$$ioi, \quad iio, \quad eoe, \quad (eeo); \quad eoe, \quad ieo \quad eio.$$

Facilmente si accerta che, tenuto conto della condizione $\alpha + \beta < 180°$, il caso *eeo* non può verificarsi. Gli altri sei casi corrispondono a figure facilmente costruibili.

Poichè anche in questi sei casi gli angoli α, β cadono dalla stessa banda di AB, si può ragionare come al n. 3 e dimostrare il teorema enunciato.

7. Come al n. 4, si può sostituire C_α con il centro del cerchio circoscritto al triangolo isoscele costruito sulla base a dalla parte del triangolo abc ed avente al vertice l'angolo α. Così per C_β e C_γ.

8. In particolare, per $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, se ne trae — com'è ben noto — che il teorema di Napoleone vale anche costruendo i tre triangoli equilateri dalla banda del triangolo dato.

9. Altri casi particolari. - Mi limiterò ai più semplici ed immediati. Si assuma α eguale all'angolo opposto ad a in abc; così per β e γ. I tre archi (α), (β), (γ), costruiti internamente, cadono tutti sul cerchio circoscritto al triangolo, e quindi il triangolo $C_\alpha C_\beta C_\gamma$ si riduce al centro O di tale cerchio. Se, invece, si costruisce (α) esternamente, il suo centro C_α sarà il simmetrico (ortogonale) di O rispetto ad a. Così per C_β e C_γ. Quindi: *i tre punti simmetrici del circum-centro rispetto ai tre lati di un triangolo, determinano un triangolo simile al dato.*

10. Dato il segmento PQ, si conduca PA perpendicolare a PQ, si unisca A con un punto C di PQ, si conduca la perpendicolare in C ad AC dalla banda opposta di P, sino ad incontrare in B la perpendicolare in Q a PQ. I triangoli APC, CBQ sono simili, evidentemente; *ad essi è simile anche il triangolo determinato dai punti medi di* AC, CB, PQ.

Infatti, posto $PC = a$, $CQ = b$, $PQ = c$, al triangolo (limite) abc si facciano corrispondere gli angoli $\alpha = PAC$, $\beta = QBC$, $\gamma = 90^\circ$: i centri C_α, C_β, C_γ coincidono precisamente con i punti medi di AC, CB, PQ.

11. Dato il triangolo abc, sull'asse di a e a partire del punto medio M di a si porti il segmento $MA = \frac{1}{2}a$ esternamente al triangolo, ed $MA' = \frac{1}{2}a$ internamente; così, dal punto medio N di b si conducano, sull'asse di b, i segmenti NB, NB', esternamente ed internamente, eguali a $\frac{1}{2}b$: detto P il pnnto medio di c, *i segmenti* PA, PB *sono eguali e perpendicolari, e così i segmenti* PA′, PB′.

Si osservi che, posto $\alpha = \beta = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, prendendo (α), (β), (γ) esternamente al triangolo, risulta $C_\alpha = A$, $C_\beta = B$, $C_\gamma = P$; e prendendo gli archi internamente, si ha $C_\alpha = A'$, $C_\beta = B'$, $C_\gamma = P$. Pertanto, i triangoli PAB e $PA'B'$ sono rettangoli in P ed isosceli.

12. Il triangolo ABC, di angoli α, β, γ, sia acutangolo, con $\alpha \leq \beta$. Spostiamo B sulla CB (all'esterno del triangolo) fino in D, così da avere $DAC = \beta$: risulterà $ADC = \alpha$. Conduciamo da A la perpendicolare a BC (che sarà interna al triangolo) sino ad A', simmetrico di A, che uniremo con B, C, D.

Prendiamo, ora, un punto qualunque A_0 sul lato AD, tiriamo da A_0 la parallela alla DA' sino a tagliare in P la AA', e da P procediamo parallelamente ad AB giungendo in B_0 sulla BA': *il triangolo* A_0B_0C *risulterà simile ad* ABC.

Infatti, se si considera il triangolo-limite APA', il centro C_α su AP è A_0, il centro C_β su PA' è B_0, e il centro C_γ su AA', dalla parte opposta agli altri due, è C.

Il teorema vale anche se A_0 passa sui prolungamenti di AD, in quanto uno dei due archi (α) e (β) si sposta dalla parte di (γ), mentre l'altro viene a corrispondere al lato maggiore del triangolo-limite. Così pure, si può prendere A_0 su AB, scambiando AB con AD.

Ne segue, anche, che A_0B_0 è minimo quando lo è CA_0, cioè quando CA_0 è perpendicolare ad AD; contemporaneamente, CB_0 risulterà perpendicolare a BA', e quindi: « le perpendicolari da C ad AD e BA' formano un triangolo simile al dato ».

Se $\alpha = \beta$, la costruzione si semplifica alquanto, risultando $D = B$.

Questo teorema, per la forma della figura $ABCDA'$ su cui si opera, può chiamarsi *teorema dell'aquilone*.