Bollettino
Unione Matematica Italiana

Seb. Timpanaro

Le interpretazioni della geometria non euclidea

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 82–85.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_82_0>

Le interpretazioni della geometria non euclidea.

Nota di SEB. TIMPANARO † (a Pisa).

Sunto. - *I fondatori della geometria non euclidea,* BOLYAI *e* LOBACEVSKJI, *ebbero consapevolezza d'aver creato una nuova scienza, ma non compresero che la geometria non euclidea è vera come l'euclidea e può coesistere con essa. Ma dopo le ricerche più recenti da* RIEMANN *a* BIANCHI *e la critica di* POINCARÉ *si può considerare acquisita l'idea che le varie geometrie non sono che teorie di speciali geodetiche definite dai relativi postulati e sono perciò tutte egualmente vere. Quanto alla teoria kantiana dello spazio, essa non implica particolari ipotesi sulla metrica dello spazio, e perciò è compatibile con ogni geometria.*

I fondatori della geometria non euclidea ebbero consapevolezza dell'importanza della scienza nuova da loro creata. Com'è noto, GIOVANNI BOLYAI, nella lettera scritta al padre da Temesvar il 3 novembre 1823 disse: Ho creato dal nulla un nuovo universo. LOBACEVSKJI, nella sua *Pangeometria*, mostra inoltre un gran senso critico. Egli dice esplicitamente che la definizione comune della parallela è insufficiente perchè non caratterizza abbastanza una sola linea retta e aggiunge: Si può dire la stessa cosa della maggior parte delle definizioni date ordinariamente negli elementi di geometria; poichè queste definizioni non solamente non indicano la generazione delle grandezze che si definiscono, ma non dimostrano neanche che queste grandezze possano esistere. Così si definiscono la linea retta ed il piano con una delle loro proprietà; si dice che le linee rette sono quelle che si confondono sempre allorchè hanno due punti comuni; che un piano è una superficie con la quale una linea retta si confonde sempre, allorchè con essa ha due punti comuni. Egli preferisce perciò di cominciare non col piano e la retta ma con la sfera e col cerchio, le cui definizioni non sono incomplete giacchè contengono la generazione delle grandezze che definiscono. D'altra parte, procede nelle dimostrazioni con metodo rigoroso che fu giustamente ammirato da GAUSS. Egli afferma che la pangeometria è una dottrina completa, fondata su principii certi e che la supposizione della geometria ordinaria che il valore della somma dei tre angoli di un triangolo rettilineo è costante non è una conseguenza necessaria delle nostre nozioni di spazio. Eppure BOLYAI, dopo aver scritto l'*Appendix* sulla scienza dello spazio assolutamente vera ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell'assioma XI di EUCLIDE (da non potersi decidere mai a priori), ebbe una crisi e cercò di dimostrare il quarto postulato.

LOBACEVSKJI fu più fermo, anzi abbandonò il titolo di geometria immaginaria che aveva prima adottato. In realtà però anche lui non riuscì mai a comprendere che la geometria non euclidea è vera come l'euclidea e può coesistere con essa. Egli credette che l'esperienza potesse decidere in favore dell'una o dell'altra geometria, e poichè le misure dirette non mostrano che la somma degli angoli di un triangolo possa differire anche minimamente da due retti, credette che l'ipotesi che la somma sia minore di due retti non possa avere applicazione che nell'analisi. La geometria iperbolica sarebbe dunque una geometria coerente in senso formale, ma non rispondente alla realtà; sarebbe essenzialmente astratta, mentre la geometria euclidea sarebbe, o sembrerebbe, concreta.

Lo stesso KLEIN, a cui si devono ricerche importanti nel campo della geometria non euclidea, nel Programma di Erlangen, pur riconoscendo che le ricerche sulla teoria delle parallele hanno dimostrato definitivamente che l'assioma delle parallele non è conseguenza matematica di quelli che generalmente gli si premettono ma rivela un elemento di intuizione essenzialmente nuovo, dice che proporsi se il postulato sia o no verificato approssimativamente dall'esperienza è una questione filosofica che non interessa il matematico come tale. La matematica sarebbe così astrazione o, come direbbe CROCE, pseudo-concetto e non vera scienza.

Tuttavia, dopo le ricerche di RIEMANN, BELTRAMI, HILBERT, KLEIN, DEHN, CAYLEY, CLIFFORD, HELMOLTZ, LIE dopo le ricerche del nostro LUIGI BIANCHI e la critica di POINCARE, mi pare che si possa considerare acquisita l'idea che la geometria non euclidea è vera come l'euclidea e che scegliere tra l'una e l'altra è assurdo.

Ormai è assodato che della geometria non euclidea si possono dare interpretazioni euclidee e che si può con opportuni vocabolari passare dall'una all'altra geometria; d'altra parte è stato chiarito che queste varie geometrie non son che teorie di speciali geodetiche definite dai rispettivi postulati; è evidente perciò che le varie geometrie, compresa quella generale o assoluta, cioè che non afferma nè nega il postulato euclideo e quelli di LOBACEVSKJI-BOLYAI o di RIEMANN, tutte le geometrie non sono che capitoli diversi di una stessa scienza.

Questo punto di vista è, in fondo, quello di POINCARE reso coerente, cioè liberato di quel convenzionalismo che ha, secondo me, oltrepassato il genuino pensiero dello scienziato francese. Ne « La science et l'hypothèse », il POINCARÉ parla dell'interpretazione che BELTRAMI ha dato della geometria di LOBACEVSKJI e di quelle che si possono dare mediante opportuni dizionari e conclude che non si potrà mai incorrere in contradizioni sviluppando tutte le conseguenze dell'ipotesi di LOBACEVSKJI, giacchè se due teoremi di LOBACEVSKJI fossero contradittorii sarebbero pure contradittorie le loro traduzioni. Non è tutto — aggiunge POINCARE —: la geometria di LOBACEVSKJI, suscettibile di una interpretazione concreta, cessa di essere un vano esercizio di logica e può ricevere delle applicazioni; e cita le proprie ricerche e quelle di KLEIN per l'integrazione delle equazioni lineari. Egli osserva inoltre che l'interpretazione di cui ha parlato non è unica, e si potrebbero stabilire più dizionari analoghi che permetterebbero di passare dai teoremi di LOBACEVSKJI a quelli di geometria ordinaria.

Egli osserva ancora che i postulati della geometria non sono nè giudizi sintetici a priori nè fatti sperimentali, o meglio definizioni mascherate; e alla domanda: — La geometria euclidea è vera? — risponde che essa non ha senso, come non ha senso domandarsi se il sistema metrico decimale sia vero e le antiche misure false; se siano vere le coordinate cartesiane e false le polari; e che perciò una geometria non può essere più vera, ma soltanto più comoda di un'altra. Evidentemente, sia pure in modo non del tutto chiaro, POINCARE non nega che la geometria sia vera e tanto meno afferma che essa è tutta arbitraria; egli dice soltanto che per l'interpretazione della realtà fisica può essere più comoda la geometria euclidea che è strettamente legata al nostro mondo, mentre in un mondo fisico costituito diversamente, in cui per esempio non ci fossero corpi solidi, potrebbe essere preferibile l'uso di un'altra geometria. Per comprendere il punto di vista del POINCARÉ occorre tener presente ciò che egli dice anche ne *La valeur de la science* e in *Science et méthode.* Evidentemente — egli dice nel primo di questi libri — quando diciamo che la retta euclidea è una *vera* retta, vogliamo dire soltanto che la prima idea intuitiva corrisponde a un oggetto *più notevole* della seconda. L'oggetto più notevole, come è noto, è il corpo solido, sul quale è modellata la geometria euclidea.

In *Science et méthode* egli dice che se un raggio luminoso non soddisfa al postulato di EUCLIDE noi non dobbiamo rinunziare alla geometria euclidea, ma concludere che il raggio luminoso non è rettilineo, tanto più che il raggio luminoso probabilmente non ubbidisce rigorosamente nè al postulato di EUCLIDE nè alle altre proprietà della retta euclidea.

A me pare che all'idea che, anche dopo il POINCARE, alcuni difendono, secondo la quale si dovrebbe risolvere per via sperimentale il problema del carattere euclideo o non euclideo dello spazio, si possa opporre questo ragionamento: Se, misurando gli angoli di un triangolo, troviamo che la loro somma non è uguale a due retti, e siamo naturalmente sicuri di non aver commesso errori, non è certo legittimo di concludere che la geometria euclidea è falsa, ma solo che quel triangolo non è euclideo.

Per concludere devo dire qualche parola sui rapporti tra la geometria non euclidea e la teoria kantiana dello spazio. Com'è noto, in Italia alcuni matematici, come l'Enriques, i quali continuano una tradizione che risale ai tempi di Kant, sostengono che le geometrie non euclidee abbiano distrutto la teoria kantiana; altri, come il Caramella e altri filosofi, dicono invece che la teoria di Kant è la migliore giustificazione delle geometrie non euclidee. A me pare che il problema non sia ben posto, ma inclino a credere che abbiano più ragione i filosofi.

Del resto Poincaré è più vicino a Kant che all'empirismo. Non si può negare che Kant si riferisca implicitamente alla geometria euclidea, ma egli mostra di ignorare radicalmente la stessa possibilità di altre geometrie. È certo però che la sua teoria dello spazio non implica particolari ipotesi sulla metrica dello spazio e quindi va considerata come del tutto indipendente dal carattere euclideo o non euclideo della geometria.

La teoria di Kant non è nè euclidea nè antieuclidea ma extraeuclidea, e appunto perciò è compatibile con ogni geometria.