BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO VILLA, GUIDO VAONA

Sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali fra due piani o spazi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **5** (1950), n.1, p. 48–54.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1950_3_5_1_48_0>

Sul caso cremoniano delle trasformazioni puntuali fra due piani o spazi.

Nota di MARIO VILLA e GUIDO VAONA (a Bologna).

Sunto. - *Si pone dapprima sotto nuova forma la condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione puntuale fra due piani si possa osculare, in una coppia a Jacobiano nullo, con una trasformazione cremoniana. Si determinano poi analoghe condizioni per una trasformazione puntuale fra due* S_3.

1. L'intorno di una trasformazione cremoniana generica fra due spazi lineari S_r $(r > 1)$, in una coppia regolare di punti corrispondenti (cioè a Jacobiano non nullo), è generico. Una trasformazione puntuale, in una coppia regolare di punti corrispondenti, si può infatti sempre approssimare fino ad un intorno d'ordine qualunque con una trasformazione cremoniana (1). Invece già l'intorno del 2° ordine di una trasformazione cremoniana in una coppia a Jacobiano nullo è sempre particolare. Affinchè una trasformazione puntuale sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine di una coppia a Jacobiano nullo. con una trasformazione cremoniana, occorre cioè che soddisfi ad una particolare condizione (che presenti il *caso cremoniano*).

Per le trasformazioni puntuali fra due piani tale condizione è

(1) Per l'intorno del 2° ordine e r qualunque: VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. Nota III, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. IV, p. 295 (1948). Per l'intorno del 3° ordine e $r=2$: BOMPIANI, *Fasci di elementi differenziali nel piano proiettivo*, « Rend. di Matematica », ser. V, vol. VII, p. 124 (1948). Sulla necessità di dare una dimostrazione, per un intorno d'ordine qualunque, insistette in varie occasioni M. VILLA (ad es. a Pisa, III Congresso dell'U. M. I., 1948). La dimostrazione venne data per $r=2$ da B. SEGRE (*Corrispondenze analitiche e trasformazioni cremoniane*, « Annali di Matematica », ser. IV, vol. XXVIII, p. 105, 1950) e per r qualunque da C. F. MANARA (*Approssimazione delle trasformazioni puntuali regolari mediante trasformazioni cremoniane*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », ser. VII, vol. VIII, 1950).

già stata determinata (²) e ad essa si può anche dare la forma seguente (n. 2):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due piani sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine di una coppia (O, O') *a Jacobiano nullo* (O *punto semplice della Jacobiana), con una trasformazione cremoniana è che le curve corrispondenti alle rette per* O' *abbiano in* O *lo stesso* E_2 *(si osculino in* O*).*

Per le trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari si ha un risultato analogo (n. 3):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due S_3 *sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine di una coppia* (O, O') *a Jacobiano nullo* (O *punto semplice della Jacobiana), con una trasformazione cremoniana è che le superficie corrispondenti ai piani per* O' *abbiano in comune un elemento* E_2 *di centro* O (³).

Questa condizione equivale alla seguente (n. 4):

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due S_3 *sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine di una coppia* (O, O') *a Jacobiano nullo* (O *punto semplice della Jacobiana), con una trasformazione cremoniana è che la retta stazionaria per* O *sia ivi tangente alla Jacobiana.*

Nel n. 5 si richiamano (⁴) certe condizioni analitiche per l'omaloidicità di un sistema lineare di superficie algebriche di S_3 che sono soltanto necessarie ma che non appaiono troppo lontane dalla sufficienza. Sulla determinazione delle condizioni analitiche necessarie e sufficienti per l'omaloidicità di un sistema lineare di ipersuperficie algebriche di S_r si ritornerà in altro lavoro.

2. Fra i piani proiettivi π, π' si consideri una trasformazione puntuale T e sia (O, O') una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo (O punto semplice della curva Jacobiana di π). Si ha:

(²) Tale condizione è la seguente: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale fra due piani sia approssimabile, fino all'intorno del 2° ordine di una coppia* (O, O') *a Jacobiano nullo, con una trasformazione cremoniana è che l'*E_1 *stazionario in* O *appartenga alla Jacobiana.* Si veda: Villa, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei » ser. VIII, vol. II, p. 136 (1947).

(³) La condizione esposta in Villa e Sangermano (*Condizione affinchè una trasformazione puntuale fra due* S_3*, in una coppia a Jacobiano nullo, sia osculabile con una trasformazione cremoniana*, « Questo Bollettino », ser. III, vol. IV, p. 23. 1949) va sostituita con quella attuale.

(⁴) Si veda: Villa e Sangermano, op. cit. nella (³), p. 29

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la trasformazione T *sia approssimabile, fino all'intorno del* 2° *ordine di* (O, O'), *mediante una trasformazione cremoniana è che le curve corrispondenti alle rette per* O' *abbiano in* O *uno stesso* E_2 *(si osculino in* O*)*.

La trasformazione T, nell'intorno della coppia (O, O'), con opportuna scelta dei riferimenti proiettivi in π, π' ([5]), si può rappresentare con sviluppi del tipo

$$\begin{aligned} x' &= ax + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + [3] \\ y' &= \qquad b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + [3]. \end{aligned}$$

Ad una retta generica per O', $x' = ky'$, corrisponde una curva contenente l'E_2 di centro O di equazione

$$ax = (kb_{22} - a_{22})y^2.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè questo E_2 sia indipendente dalla retta $x' = ky'$ considerata è che sia

$$b_{22} = 0.$$

D'altra parte questa è condizione necessaria sufficiente affinchè *l'*E_1 *stazionario* ($\mathrm{x} = 0$) *appartenga alla tangente alla Jacobiana* ($\mathrm{b}_{12}\mathrm{x} + \mathrm{b}_{22}\mathrm{y} = 0$). Segue l'asserto ([6]).

3. Per le trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari S_3, S_3 sussiste il teorema analogo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale T *fra due* S_3 *sia approssimabile, fino all'intorno del* 2° *ordine in una coppia* (O, O') *a Jacobiano nullo (*O *punto semplice della Jacobiana), con una trasformazione cremoniana è che le superficie corrispondenti ai piani per* O' *abbiano in comune un elemento* E_2 *di centro* O.

La condizione è *necessaria*. Si supponga infatti che esista una trasformazione cremoniana T_0 che oscula la trasformazione T nella coppia (O, O') a Jacobiano nullo. Sia $|F|$ il sistema omaloidico di superficie di S_3 corrispondenti, in T_0, ai piani di S_3'. Come è ben noto, le superficie di $|F|$ passanti per un punto semplice P della Jacobiana di T_0 hanno una tangente comune. Questa circostanza, essendo $|F|$ omaloidico, si può presentare solo se tali superficie hanno

([5]) Basta assumere in π, π' riferimenti proiettivi con le origini in O e O', l'asse y di π coincidente colla retta *stazionaria* e l'asse x' di π' colla retta *fissa* (Bompiani, *Corrispondenza puntuale fra piani proiettivi: esame delle Jacobiane*, « Memorie dell'Acc. d'Italia », vol. XIV, p. 11, 1943).

([6]) Si veda la ([2]).

una curva o una superficie in comune, passante per P [7]. Segue che le superficie per O, corrispondenti in T_0 ai piani per O' (superficie di $|F|$ passanti per O) hanno in comune necessariamente almeno una curva γ. Siccome T_0 oscula T in (O, O'), le superficie corrispondenti in T ai piani per O' dovranno necessariamente contenere l'E_2 di γ di centro O [8].

La condizione è *sufficiente*. Una trasformazione puntuale T fra $S_3(x, y, z)$, $S_3'(x', y', z')$ nell'intorno di una coppia (O, O') a Jacobiano nullo e di caratteristica 2 [9], si può, in generale, rappresentare con sviluppi del tipo

$$\begin{aligned} x' &= x + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + [3] \\ y' &= y + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + b_{33}z^2 + [3] \\ z' &= \phantom{x +{}} 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + c_{33}z^2 + [3], \end{aligned} \tag{1}$$

dove

$$\begin{aligned} 2a_{12} + 2a_{13} + 2a_{23} + a_{33} &= 0 \\ 2b_{12} + 2b_{13} + 2b_{23} + b_{33} &= 0 \\ 2c_{12} + 2c_{13} + 2c_{23} + c_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Occorre per ciò fissare in S_3, S'_3 riferimenti proiettivi colle origini in O, O' e assumere opportunamente gli assi x, y, z e la retta $x = y = z$ di S_3, gli assi x', y' e la retta $x' - y' = z' = 0$ di S'_3, ed infine il piano improprio di S_3 [10].

Imponendo a T di soddisfare alla condizione enunciata si ha

$$c_{33} = 0. \tag{2}$$

Si può ancora scegliere intrinsecamente l'asse z' di S_3' [11], assumendo come asse z' la retta intersezione dei due piani passanti

(7) Si veda ad es.: L. GODEAUX, *Les transformations birationnelles de l'espace*, « Mémorial des Sc. Math. ». fasc. LXVII, pp. 7-8, Paris (1934)

(8) Si ha anche: Condizione *necessaria* affinchè una trasformazione puntuale T fra due S_3 sia approssimabile, fino all'intorno di ordine $s > 1$ di una coppia (O, O') a Jacobiano nullo (O semplice per la Jacobiana), con una trasformazione cremoniana è che le superficie corrispondenti ai piani per O' abbiano in comune un elemento E_s di centro O.

(9) Se O è semplice per la Jacobiana la caratteristica è esattamente 2; non può essere < 2 in quanto, in tale ipotesi, O è almeno doppio per la Jacobiana.

(10) Si veda: VILLA e VAONA, *Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo* I. *Intorno del 2° ordine*, « Rend. dell'Acc. dei Lincei », ser. VIII, vol. IV, p. 184 (1949).

(11) Nel caso attuale non si può scegliere l'asse z' nel modo indicato nel lav. cit. in (10) poichè la retta che ivi si sceglie come asse z' appartiene ora al piano $x'y'$

per gli assi x', y' rispettivamente, ai quali corrispondono in S_3 superficie aventi in O punto parabolico. Segue

$$a_{23} = b_{13} = 0.$$

Colla scelta fatta dei riferimenti, le equazioni di T si possono scrivere

$$\begin{aligned} x' &= x + a_1xy + a_2xz - (a_1 + a_2)z^2 + [3] \\ y' &= y + b_1xy + b_2yz - (b_1 + b_2)z^2 + [3] \\ z' &= \phantom{y +{}} c_1xy + c_2xz - (c_1 + c_2)yz + [3], \end{aligned}$$

le a, b, c cóstanti ([12]).

Si consideri ora la trasformazione T_0 di equazioni

$$(3) \qquad x' = \frac{A_1}{A_2}, \qquad y' = \frac{B_1}{B_2}, \qquad z' = \frac{c_1A_1B_1 + [c_2A_1B_2 - (c_1 + c_2)A_2B_1]z}{A_2B_2},$$

dove

$$\begin{aligned} A_1 &= x - (a_1 + a_2)z^2, & A_2 &= 1 - a_1y - a_2z, \\ B_1 &= y - (b_1 + b_2)z^2, & B_2 &= 1 - b_1x - b_2z. \end{aligned}$$

La T_0 *approssima* T *fino all'intorno del* 2° *di* (O, O') *ed è inoltre birazionale* poichè dalle (3) si deducono immediatamente le inverse

$$x = \frac{\alpha_1\delta_2^2 + \delta_1(\alpha_2\delta_2 + \alpha_3\delta_1)}{\gamma\delta_2^2}, \qquad y = \frac{\beta_1\delta_2^2 + \delta_1(\beta_2\delta_2 + \beta_3\delta_1)}{\gamma\delta_2^2}, \qquad z = \frac{\delta_1}{\delta_2},$$

dove

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x' - a_1x'y', & \alpha_2 &= a_1b_2x'y' - a_2x', & \alpha_3 &= a_1 + a_2 - a_1(b_1 + b_2)x', \\ \beta_1 &= y' - b_1x'y', & \beta_2 &= a_2b_1x'y' - b_2y', & \beta_3 &= b_1 + b_2 - b_1(a_1 + a_2)y', \\ \gamma &= 1 - a_1b_1x'y', & \delta_1 &= z' - c_1x'y', & \delta_2 &= c_2x' - (c_1 + c_2)y' \text{ ([13])}. \end{aligned}$$

Il teorema è così dimostrato.

4. Al teorema del n. 3 si può dare anche la forma seguente: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione puntuale* T *fra due* S_3 *sia approssimabile, fino all'intorno del* 2°

([12]) Notiamo, incidentalmente, che nel caso attuale (caso *cremoniano*) T possiede *cinque rette caratteristiche* uscenti da O anzichè sei, come si ha nel caso generale di una coppia (O, O') a Jacobiano nullo di caratteristica 2 (si veda op. cit. nella ([10]), p. 187). Qui una di esse coincide colla retta stazionaria come appare dalle equazioni delle rette caratteristiche stesse

$$\begin{gathered} x[b_1xy + b_2yz - (b_1 + b_2)z^2] - y[a_1xy + a_2xz - (a_1 + a_2)z^2] = 0, \\ c_1xy + c_2xz - (c_1 + c_2\, yz = 0. \end{gathered}$$

([13]) La trasformazione T_0 è del 4° ordine e la sua inversa del 5°. Il sistema omaloidico di S_3 ha come elementi base: la retta impropria del piano xy (doppia e di contatto), la retta impropria del piano di equazione $b_1c_1(a_1 + a_2)x - a_1(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)y + [a_1c_1(b_1 + b_2) + c_2(a_1b_2 - a_2b_1)]z = 0,$

ordine di una coppia (O, O') *a Jacobiano nullo* (O *punto semplice della Jacobiana*), *con una trasformazione cremoniana è che la retta stazionaria per* O *sia ivi tangente alla Jacobiana.*

Infatti perchè la retta stazionaria ($x = y = 0$) della trasformazione T rappresentata dalle (1), appartenga al piano tangente alla Jacobiana ($c_{13}x + c_{23}y + c_{33}z = 0$) occorre e basta che sia

$$c_{33} = 0.$$

Ma ciò, per la (2), è condizione necessaria e sufficiente perchè le superficie corrispondenti, in T, ai piani per O' abbiano in comune un elemento E_2 di centro O. Dal teorema del n. 3 segue dunque il teorema enunciato.

5. Dal n. 3 segue:

Condizione necessaria affinchè un sistema lineare ∞^3 *di superficie algebriche dell'* S_3 (*d'ordine* > 1), *a Jacobiana non indeterminata, sia omoloidico è che, in ogni punto* P *semplice della superficie Jacobiana, le superficie del sistema passanti per* P *abbiano un* E_2 *in comune di centro* P.

Si ha pure (n. 4) ([14]):

Condizione necessaria affinchè un sistema lineare ∞^3 *di superficie algebriche dell'* S_3 (*d'ordine* > 1), *a Jacobiana non indeterminata, sia omoloidico è che, in ogni punto* P *semplice della superficie Jacobiana del sistema, la retta stazionaria per* P *appartenga al piano ivi tangente alla Jacobiana.*

Si ha infine ([15]):

Dati quattro polinomi f, φ, ψ, χ, *omogenei e dello stesso grado* $n > 1$ *nelle variabili* x_1, x_2, x_3, x_4, *linearmente indipendenti, a Jacobiano* J *non identicamente nullo, condizione necessaria affinchè la trasformazione* $y_1 = f$, $y_2 = \varphi$, $y_3 = \psi$, $y_4 = \chi$ *sia cremoniana è che*

le coniche γ_1, γ_2 di equazioni $A_1 = A_2 = 0$, $B_1 = B_2 = 0$. La Jacobiana di S_3 è composta: dal piano improprio (contato tre volte), dai piani di equazioni $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, dalla superficie rigata del 4° ordine di equazione $A_2B_2 = a_1b_1A_1B_1$ (luogo delle rette che si appoggiano alle coniche γ_1, γ_2 e alla retta impropria del piano xy) ed infine dalla superficie cubica di equazione $c_2A_1B_2 = (c_1 + c_2)A_2B_1$. Su quest'ultima componente della Jacobiana giace il punto O.

([14]) Questo risultato trovasi già in: VILLA e SANGERMANO, op. cit. in (3), p. 29.

([15]) Anche questo risultato trovasi in: VILLA e SANGERMANO, op. cit. in (3), p. 29.

il polinomio

$$
(4) \qquad \begin{vmatrix} f\varphi_1 - \varphi f_1 & f\varphi_2 - \varphi f_2 & f\varphi_3 - \varphi f_3 \\ f\psi_1 - \psi f_1 & f\psi_2 - \psi f_2 & f\psi_3 - \psi f_3 \\ J_1 & J_3 & J_3 \end{vmatrix}
$$

sia divisibile per J *oppure sia identicamente nullo* ([16]).