
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIO CRENNÀ

Estensione del Teorema di Pitagora

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 4
(1949), n.4, p. 412–416.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_412_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Estensione del Teorema di Pitagora.

Nota di MARIO CRENNÀ (a Fiorenzuola d'Arda).

Sunto. - *Si dimostra che il Teorema di Pitagora è un caso particolarissimo di un teorema più generale che riguarda qualsiasi triangolo, per cui una conveniente potenza del suo lato maggiore (o minore) è uguale alla somma delle potenze simili dei rimanenti lati.*

Chiamando *simili* due potenze di uguale esponente, il Teorema di PITAGORA stabilisce che fra le misure del lato maggiore di un triangolo rettangolo e quelle dei rimanenti lati intercorre una relazione per cui la somma di due potenze simili di questi ultimi è uguale a una potenza simile del primo. Vogliamo dimostrare che il Teorema di PITAGORA non è altro che un caso particolarissimo di un teorema più generale, che riguarda qualsiasi triangolo, a ciascuno dei quali restano connesse due particolari potenze che riguardano l'una il lato maggiore e l'altra il lato minore.

Per brevità parlando dei lati intenderemo riferirci alle rispettive misure.

TEOREMA. - *Una conveniente potenza del lato maggiore di un triangolo qualunque è uguale alla somma delle potenze simili dei rimanenti lati e l'esponente è compreso fra 1 e 2 per i triangoli ottusangoli e fra 2 e $+\infty$ per i triangoli acutangoli: una conveniente potenza del lato minore di un triangolo qualsiasi (con l'esponente compreso fra $-\infty$ e 0) è uguale alla somma delle potenze simili dei rimanenti lati.*

DIMOSTRAZIONE. - Per la dimostrazione del teorema procediamo per la via analitica che semplifica enormemente il processo euristico. Sia $AB=2c$ un lato di un triangolo qualsiasi; assumiamo la retta AB come asse delle ascisse e la perpendicolare nel suo punto medio come asse delle ordinate. Siano x ed y le coordinate del terzo vertice C ; l'equazione del luogo geometrico dei punti C del piano per i quali risulta:

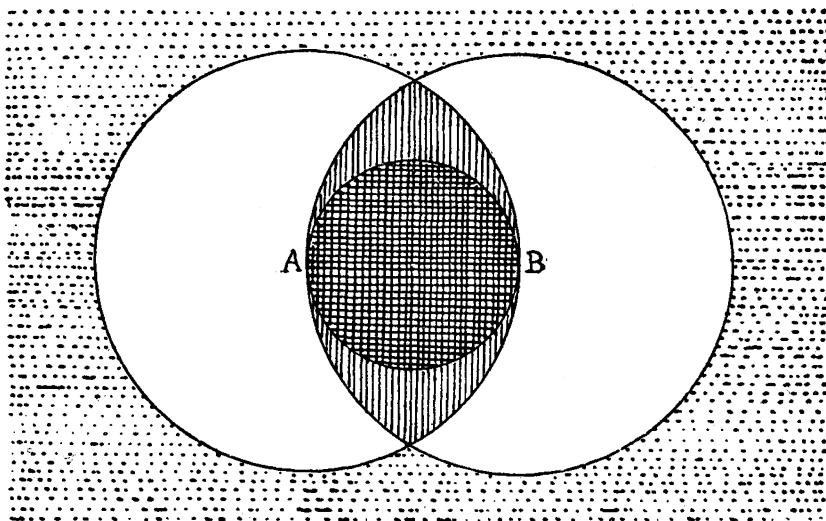
$$\overline{AC}^n + \overline{CB}^n = \overline{AB}^n$$

è la seguente:

$$(1) \quad \left[y^2 + (c+x)^2 \right]^{\frac{n}{2}} + \left[y^2 + (c-x)^2 \right]^{\frac{n}{2}} = 2^n c^n.$$

Consideriamo per il lato AB tutti i casi possibili; se esso è il maggiore, gli angoli ad esso adiacenti sono entrambi acuti e tutti i possibili triangoli aventi AB come lato maggiore restano compresi nella striscia determinata dalle perpendicolari ad AB condotte per A e per B . Per $n=1$ la (1) è soddisfatta soltanto se è $y=0$ e il triangolo richiesto degenera nel segmento AB ; per $n=2$ la (1) fornisce l'equazione della circonferenza di diametro AB , i triangoli risultano rettangoli e si ha il teorema di PITAGORA.

La (1) fornisce, al variare di n , l'equazione di una famiglia di



Zona quadrettata: $1 \leq \text{esponente} \leq 2$.
 Zona tratteggiata: $2 \leq \text{esponente} < +\infty$.
 Zona punteggiata: $-\infty < \text{esponente} < 0$.

curve simmetriche rispetto ad entrambi gli assi cartesiani, ed è continua sia nei confronti di x che di y , sia riguardando anche la n come variabile; per tale motivo quando n assume tutti i valori compresi fra 1 e 2 le curve corrispondenti riempiono tutta la regione di piano racchiusa dalla circonferenza di diametro AB e i triangoli che ci interessano risultano ottusangoli. Dalle precedenti considerazioni scaturisce la seguente definizione del *cerchio di diametro AB* come la regione dei punti del piano per i quali la somma delle potenze simili delle rispettive distanze da A e da B è uguale alla potenza simile di AB , variando gli esponenti fra 1 e 2, i limiti inclusi.

Quando n supera 2 i triangoli che interessano diventano acutangoli, pur restando AB il lato maggiore; descrivendo i due cerchi di centro A e B rispettivamente e di raggio AB la parte di piano comune ad entrambi risulta limitata da due archi i cui punti forniscono il terzo vertice C che dista da A o da B di un segmento uguale ad AB ; in questo caso n risulta infinito e l'area compresa fra i due cerchi anzidetti è la regione dei punti per i quali la somma delle potenze simili delle rispettive distanze da A e da B è uguale alla potenza simile di AB , variando gli esponenti da 1 a $+\infty$.

Tutti i punti esterni ai due cerchi di centro A e B e raggio AB distano da A e da B di un segmento maggiore di AB , per cui AB diventa il lato minore di ogni triangolo il cui terzo vertice sia esterno ai due cerchi considerati. La (1) fornisce ancora l'equazione del luogo geometrico dei punti C del piano per i quali risulta. $\overline{AC}^n + \overline{CB}^n = \overline{AB}^n$ ma affinchè la realtà sia soddisfatta deve risultare n negativo. Lungo le circonferenze di centri A e B e raggio AB , n assume il valore $\pm\infty$; di mano in mano che le curve rappresentate dalla (1) si allontanano dalle circonferenze anzidette il valore di n corrispondentemente passa con continuità da $-\infty$ a valori di modulo continuamente decrescente, tendendo a zero quando x ed y tendono all'infinito. Il teorema risulta così dimostrato. Esso può esercitare un influsso interessante nella teoria dei numeri. Si può intanto affermare che per ogni terna di numeri tali che uno di essi sia minore della somma e maggiore della differenza degli altri due, esiste una potenza del maggiore, di esponente superiore ad 1, che è uguale alla somma delle potenze simili degli altri due, ed una potenza del minore, con esponente negativo, che è uguale alla somma delle potenze simili degli altri due. Non sarà inutile osservare che le due lunule costituite dalle due regioni non comuni ai cerchi di centri A e B e raggio AB costituiscono il luogo geometrico dei terzi vertici C del triangolo ABC per cui il lato AB

risulta di grandezza intermedia fra gli altri due. È evidente che in questo caso nessuna potenza di AB può essere uguale alla somma delle potenze simili degli altri due lati; esisteranno invece due opportune potenze di AB (di cui una ad esponente maggiore di 1 e l'altra ad esponente negativo) che saranno uguali alla differenza delle potenze simili degli altri due lati.

Non risulteranno infine inutili le seguenti considerazioni relative all'equazione (1): per ogni valore intero positivo di n la (1) rappresenta una curva *algebrica di ordine* n se n è pari e di *ordine* $4n - 2$ se n è dispari; se n è pari la curva passa per ciascuno dei punti ciclici con la molteplicità $\frac{n}{2}$; se n è dispari, con la molteplicità $2n - 2$.

Per valori particolari di n la curva corrispondente assume una forma di speciale interesse e di alcune di esse ci proponiamo di occuparci in uno studio più ampio. Così per $n = -2$ la (1) assume la forma seguente:

$$(x^2 + y^2)^2 = 10c^2x^2 + 6c^2y^2 + 7c^4$$

che fornisce una spirica notevole assai affine alla *lemniscata di Booth ellittica* la cui equazione è la seguente: ⁽¹⁾

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2. \quad (\text{con } a^2 > b^2)$$

Il suo studio approfondito può offrire qualche interessante risultato, e ci è parso utile richiamare su di essa e sull'intera famiglia di curve rappresentate da (1) l'attenzione degli studiosi.

Un'altra osservazione può essere suscettibile di ulteriori sviluppi; i punti dell'asse y sono i vertici degli infiniti triangoli isosceli di base AB nei quali l'angolo al vertice varia, con continuità, da 180° a 0° . A ciascun valore di detto angolo corrisponde un determinato numero che rappresenta l'esponente della potenza alla quale vanno elevati i lati del triangolo isoscele, affinché sussista la nota relazione fra di essi; questo numero è adunque una funzione dell'angolo e serve a determinarlo univocamente.

Indicando con $\beta = 2\alpha$ l'angolo al vertice, si dovrà avere, conservando le solite notazioni:

$$2(\sqrt{c^2 + y^2})^n = (2\sqrt{c^2 + y^2} \cdot \sin \alpha)^n \quad \text{ossia: } \sin^n \alpha = 2^{1-n}$$

(¹) Cfr. GINO LORIA, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*. Milano, Hoepli, 1930; vol. 1, pag. 160.

da cui:

$$n = \frac{\log 2}{\log (2 \operatorname{sen} \alpha)}$$

(dove il logaritmo può essere calcolato in una base qualsiasi).

Questa relazione fornisce il valore di n per ogni valore di $0^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$.

Da essa si ottengono i seguenti valori notevoli:

per $\beta = 0^\circ$ è $n = 0$; per $\beta = 60^\circ$ è $n = \pm \infty$;

per $\beta = 90^\circ$ è $n = 2$; per $\beta = 120^\circ$ è $n = \frac{\log 4}{\log 3}$;

per $\beta = 180^\circ$ è $n = 1$.

Quando l'angolo varia da 0° a 60° il valore corrispondente della funzione varia da 0 a $-\infty$, aumentando *in valore assoluto*, con l'aumentare dell'angolo, ed esaurendo tutto il campo dei numeri reali negativi; quando l'angolo varia da 60° a 180° il valore della funzione varia da $+\infty$ ad 1 , diminuendo, in valore, con l'aumentare dell'angolo, ed esaurendo il campo dei numeri reali positivi da $+\infty$ ad 1 . Se si tiene presente non solo il valore assoluto della funzione, ma essenzialmente il *valore relativo*, allora si può affermare che quando l'angolo aumenta con continuità da 0° a 180° , il valore corrispondente della funzione diminuisce con continuità da 0 a $-\infty$ e da $+\infty$ ad 1 (immaginando di stabilire una continuità fra $-\infty$ e $+\infty$).

La nuova funzione goniometrica apparisce come un necessario complemento delle note funzioni trigonometriche, ove si tenga presente la genesi delle medesime: dato un angolo (acuto) conducendo da un punto qualunque di un lato la perpendicolare sull'altro, risultano definite le note funzioni trigonometriche che risultano naturalmente indipendenti dal punto scelto sul lato, ma dipendono solo dall'angolo; evidentemente resta aperta un'altra via, per definire una funzione dell'angolo (che sia naturalmente indipendente dal punto scelto, ma che dipenda solo dall'angolo) ed è anche più spontanea della precedente: quella di considerare il triangolo isoscele avente per angolo al vertice l'angolo dato e per lato un segmento arbitrario, che è appunto la via precedentemente indicata; mentre seguendo la prima via occorre la restrizione che l'angolo sia acuto, questa non apparisce più necessaria nella seconda.