Bollettino
Unione Matematica Italiana

Salvatore Di Noi

La continuità della retta e il postulato V° di Euclide

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 410–412.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_410_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

La continuità della retta e il postulato V° di Euclide.

Nota di SALVATORE DI NOI (a Roma).

Sunto. - *Si osserva che nel V° postulato di Euclide è anche ammessa, per quanto basta alla geometria elementare, la continuità della retta.*

1. - Nella geometria elementare si ammette:

I. - *un piano è diviso da una sua retta* r *in due figure convesse* (semipiani), *che hanno comuni i soli punti di* r;

II. - *il segmento, che unisce un punto d'un semipiano con un punto del semipiano opposto, ha un punto su* r.

La **II** è un parziale riconoscimento della continuità della retta com'è facile vedere enunciando il postulato della continuità sotto la forma di PEANO [1]:

III. - *il segmento* AB, *che unisce un punto* A *d'una figura convessa* F *con un punto* B *esterno ad* F, *contiene un punto* X *tale che* AX *appartiene ad* F, *ed* XB *è fuori di* F.

Ammessa la **I**, basta supporre che *F* sia un semipiano per dedurre la **II** dalla **III**.

Dalla **I** e dalla **II** si ha:

un'altra retta t *del piano, che ha punti in entrambi i semipiani d'origine* r, *ha un punto comune con* r (incontra *r*); *e viceversa.*

È dunque la stessa cosa dire che due rette d'un piano non s'incontrano, e dire che una appartiene tutta a uno stesso semipiano rispetto all'altra, che cioè sono parallele nel senso etimologico della parola. Ma perchè queste due relazioni si identifichino è necessario ammettere la **II**, o altro postulato equivalente, ad es. il XIII di PEANO [2], con cui si riconosca, in parte, la continuità della retta.

(1) - G. PEANO. « Sui principi della geometria », in Riv. di Mat., 4 (1894).

(2) - G. PEANO, l. c. V. anche U. CASSINA - *Sul teorema fondamentale della geometria proiettiva ed i principi della geometria.* In Periodico di matematiche, Vol. XX, 2, 1940.

Le conseguenze della **II** sono varie e notevoli; qua interessa notare che, una volta ammesso in qualche modo il trasporto d' un segmento (**IV**) e l'unicità della parallela ad una retta per un punto (**V**), si ricava dalla **II**:
dati su una retta due o più punti d'ascisse a, b, c. ..., *esistono sulla retta tutti i punti le cui ascisse appartengono al campo di razionalità* $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$, *contenente tutti i numeri ottenuti, partendo da* a, b, c, ..., *con un numero finito di operazioni razionali o con operazioni del tipo* $\sqrt{m^2+n^2}$, *dove* m *ed* n *sono due qualsiasi numeri del campo* (3).

Quindi, se esiste un segmento u, esiste anche il prodotto di u per ogni numero del campo $\left(K^{\frac{1}{2}}\right)$; e l' esistenza di questo prodotto si può dimostrare senza ricorrere al postulato generale della continuità, ma servendosi soltanto della **II**.

Per esempio, si può dimostrare l'esistenza del quarto proporzionale dopo tre segmenti dati.

2. - Certamente EUCLIDE attribuisce la continuità alla retta, anche se non ne parla esplicitamente: del resto, solo di recente s'è sentito il bisogno di mettere in luce questo attributo della retta. Perciò la **II** è tacitamente ammessa negli « Elementi », come appare per es. nelle dimostrazioni delle proposizioni 10 e 21 del 1° libro.

Quindi, definendo parallele due rette d' un piano che non s'incontrano, EUCLIDE non ha il minimo dubbio che tali rette possano non essere da una stessa banda una rispetto all'altra.

Pure, questa lacuna è senz' altro colmata con la forma, inconsciamente felice, data all'enunciato del 5° postulato, con cui viene precisata la relazione di parallelismo. In quest'enunciato EUCLIDE afferma che due rette s'incontrano se con una trasversale formano angoli coniugati interni non supplementari. Egli quindi, per la definizione posta di rette parallele, afferma due fatti:

A) *le due rette non sono parallele;*

B) *le due rette hanno un punto comune.*

La prima affermazione, che porta all' unicità della parallela, è stata criticata e tormentata per tanti secoli.

La seconda, equivalente alla **II**, è, come s'è detto, un parziale riconoscimento della continuità della retta. Ed è un riconoscimento esplicito, anche se soltanto nella forma e al di là di ogni intenzione.

Si può concludere che il postulato 5° di EUCLIDE, così visto, equivale alla somma della **II** e della **V**, che nelle odierne tratta-

(3) - G. CASTELNUOVO. « Sulla risolubilità dei problemi geometrici... » in Quest. riguardanti le mat. elem. di F. ENRIQUES.

zioni sono enunciate distinte; quindi questo famoso postulato ha un contenuto più ampio di quello che di solito gli si attribuisce.

Notiamo, inoltre, che EUCLIDE nelle prime proposizioni dimostra la possibilità del trasporto del segmento avendo ammesso, senza dirlo esplicitamente, il postulato del compasso, e quindi può dimostrare l'esistenza del prodotto di un segmento per ogni numero del campo di razionalità $K^{\frac{1}{2}}$, che contiene i numeri razionali e tutti gli irrazionali quadratici [1].

E queste parziali ammissioni della continuità della retta bastano per la trattazione Euclidea, da cui resta esclusa la rettificazione della circonferenza e quindi il prodotto di un segmento per un numero trascendente. Che se poi, seguendo ARCHIMEDE, si postula l'esistenza d'un segmento lungo quanto la circonferenza, il postulato della continuità potrebbe essere bandito dalla geometria elementare.