
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BIANCA MANFREDI

Decomposizione in prodotto di operazioni elementari delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine e totalmente lineari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 4
(1949), n.4, p. 381–390.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_381_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Decomposizione in prodotto di operazioni elementari
delle espressioni alle derivate parziali, del primo ordine
e totalmente lineari.**

Nota di BIANCA MANFREDI (a Parma).

Sunto. - *Si dà una decomposizione, in prodotto di operazioni elementari, di una espressione alle derivate parziali in una funzione incognita, del primo ordine e totalmente lineare, e se ne fa un'applicazione.*

In questa Nota indico una decomposizione, in prodotto di operazioni elementari, di una espressione alle derivate parziali in una

(⁸) Nell'opera di S. TIMOSHENKO, cit. prec. cap. VI, § 43, è riportata la tabella pubblicata nella memoria di K. A. KALISEV, « Mem. Ist. Engineers of Ways of Communication », St. Petersburg, 1914. Tale tabella è stata calcolata solo per $\nu = 0,3$, relativo ai metalli duttili.

funzione incognita, del primo ordine e totalmente lineare ⁽²⁾: ciò a continuazione di quanto è stato già fatto per le equazioni differenziali ordinarie lineari ⁽³⁾. In successivi lavori indicherò decomposizioni analoghe per espressioni alle derivate parziali di ordine superiore al primo.

La sopraddeffa decomposizione ha una prima conseguenza degna di rilievo (vedasi n.º 4): riferendoci, per semplicità, al caso di due sole variabili indipendenti, segue che la risoluzione di un'equazione completa

$$\frac{\partial z}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + b(x, y)z = f(x, y)$$

si può ricondurre alla risoluzione della semplice equazione omogenea (in due variabili indipendenti x e y)

$$\frac{\partial z}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

anzichè, come si fa, alla risoluzione della equazione omogenea (in tre variabili indipendenti x, y, z)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + [f(x, y) - b(x, y)z] \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

§ 1. Caso di due variabili indipendenti.

1. Sappiamo che un'equazione alle derivate parziali

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

ossia

$$(1') \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \right] z = 0,$$

essendo $a(x, y)$ una data funzione definita e continua in un certo campo, ha un integrale generale della forma

$$(2) \quad z = \Phi(\omega(x, y)),$$

dove $\omega(x, y)$ è una particolare soluzione di (1) e Φ è simbolo di funzione derivabile arbitraria di una variabile indipendente.

⁽²⁾ Una espressione alle derivate parziali in una funzione incognita si dirà *totalmente lineare* quando è lineare non solo rispetto alle derivate parziali della funzione incognita, ma anche rispetto alla funzione incognita stessa.

⁽³⁾ Cfr. A. MAMBRIANI, *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari*, « Atti del 1º Congresso dell'Unione Matematica Italiana », 1937, pp. 231-237.

Mi domando se, analogamente a quanto è stato fatto per le equazioni differenziali ordinarie lineari ⁽⁴⁾, è possibile, partendo dalla soluzione generale (2), determinare per l'operazione binomia del primo membro di (1') una decomposizione in un prodotto di operazioni elementari di facile inversione. La risposta è affermativa, come risulta dalle considerazioni del n°. seguente.

2. Poichè $\omega(x, y)$ è una particolare soluzione di (1), abbiamo

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0,$$

da cui

$$(3) \quad a(x, y) = - \frac{\partial \omega}{\partial x} : \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Sarà quindi $\frac{\partial \omega}{\partial y} \equiv 0$ (e in quei punti nei quali è $\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$ sarà pure $\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0$). Ne segue che se poniamo

$$u = \omega(x, y)$$

abbiamo un'equazione la quale definisce y come funzione di x e u ; sia

$$y = \omega_{-1}(x, u).$$

Allora si avrà

$$u = \omega(x, \omega_{-1}(x, u)),$$

ossia

$$(4) \quad y = \omega(x, \omega_{-1}(x, y)),$$

ed inoltre si avrà

$$(5) \quad y = \omega_{-1}(x, \omega(x, y)).$$

Quindi, se nel secondo membro della (2) ad y si sostituisce $\omega_{-1}(x, y)$, tale secondo membro, per la (4), si muta in $\Phi(y)$. Perciò, indicando questa sostituzione di y con $\omega_{-1}(x, y)$ mediante il simbolo $\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega_{-1}(x, y) \end{smallmatrix} \right\}$, dalla (2) abbiamo

$$\left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega_{-1}(x, y) \end{smallmatrix} \right\} z(x, y) = \Phi(y).$$

Applicando poi ad ambo i membri di questa uguaglianza l'operazione D_x (di derivazione rispetto ad x), si ottiene

$$D_x \left\{ \begin{smallmatrix} y \\ \omega_{-1}(x, y) \end{smallmatrix} \right\} z(x, y) = 0 \quad (5).$$

⁽⁴⁾ Cfr. loc. cit. in ⁽³⁾, in particolare la pag. 232 di tale lavoro.

⁽⁵⁾ Seguo il simbolismo consistente nel sottolineare l'insieme dei successivi operatori, come figura in loc. cit. in ⁽³⁾.

Sviluppando le operazioni indicate nel primo membro, risulta

$$D_x z(x, \omega_{-1}(x, y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_1 z(x, \omega_{-1}(x, y)) + \frac{\partial \omega_{-1}(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_{-1}} z(x, \omega_{-1}(x, y)),$$

dove $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_1$ indica la derivazione di z rispetto al suo primo argomento. Affinchè questa espressione coincida proprio col primo membro di (1), basterà in essa, in virtù di (5), sostituire alla y la funzione $\omega(x, y)$. Abbiamo quindi che l'equazione (1) si potrà scrivere così:

$$\left\{ \omega(x, y) \right\} \left\{ D_x \right\} \left\{ \omega_{-1}(x, y) \right\} z(x, y) = 0;$$

concludiamo cioè che la decomposizione desiderata è la seguente:

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = \left\{ \omega(x, y) \right\} \left\{ D_x \right\} \left\{ \omega_{-1}(x, y) \right\} z(x, y),$$

dove, ripetiamo, i simboli $\left\{ \omega_{-1}(x, y) \right\}$ e $\left\{ \omega(x, y) \right\}$ indicano rispettivamente la sostituzione di y con $\omega_{-1}(x, y)$ e la sostituzione di y con $\omega(x, y)$.

3. Osserviamo che dal n°. precedente è risultato, per il coefficiente $a(x, y)$ di (1), l'espressione

$$(7) \quad a(x, y) = \left\{ \omega(x, y) \right\} \frac{\partial \omega_{-1}(x, y)}{\partial x},$$

e confrontando questa con la (3) abbiamo la formula

$$(8) \quad - \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} = \left\{ \omega(x, y) \right\} \frac{\partial \omega_{-1}(x, y)}{\partial x}.$$

4. La decomposizione ottenuta, data da (6), trova un'interessante applicazione alla risoluzione di un'equazione alle derivate parziali, di 1° ordine, totalmente lineare e completa

$$(9) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + a(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + b(x, y)z = f(x, y),$$

essendo $a(x, y)$, $b(x, y)$, $f(x, y)$ date funzioni definite e continue in un certo campo. Per la (6) il primo membro di (9) si può scrivere

$$(10) \quad \left\{ \omega(x, y) \right\} \left\{ D_x \right\} \left\{ \omega_{-1}(x, y) \right\} z + b(x, y)z,$$

ma è

$$b(x, y)z = \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\} b(x, y)z = \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} b(x, \omega_{-1}) \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\} z,$$

onde (10) diventa

$$\left\{ \frac{y}{\omega} \right\} D_x \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\} z + \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} b(x, \omega_{-1}) \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\} z = \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} [D_x + b(x, \omega_{-1})] \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\} z,$$

ed avendosi

$$D_x + b(x, \omega_{-1}) = e^{-\int b(x, \omega_{-1}) dx} D_x e^{\int b(x, \omega_{-1}) dx}$$

(dove per l'integrale indefinito del secondo membro basta prendere solo una particolare sua determinazione), si conclude che (9) si può porre sotto la forma

$$(9') \quad \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} e^{-\int b(x, \omega_{-1}(x, y)) dx} D_x e^{\int b(x, \omega_{-1}(x, y)) dx} \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\} z = f(x, y).$$

Invertendo successivamente le varie operazioni del primo membro, s'ottiene subito

$$(11) \quad z = \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} e^{-\int b(x, \omega_{-1}(x, y)) dx} D_x^{-1} e^{\int b(x, \omega_{-1}(x, y)) dx} \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\} f(x, y),$$

dove D_x^{-1} va interpretato in tutta la sua generalità: indicando precisamente con I_x una particolare specificazione di D_x^{-1} e con $\Phi(y)$ una funzione arbitraria di y , abbiamo

$$(11') \quad z(x, y) = \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} e^{-\int b(x, \omega_{-1}) dx} I_x e^{\int b(x, \omega_{-1}) dx} \left\{ \frac{y}{\omega_{-1}} \right\} f(x, y) + \Phi(\omega) \left\{ \frac{y}{\omega} \right\} e^{-\int b(x, \omega_{-1}) dx}.$$

Questa formula risolutiva pone in chiara evidenza il fatto accennato nell'introduzione: e, cioè, che la risoluzione dell'equazione (9) si riconduce alla risoluzione della semplice equazione omogenea (1).

Esempio. - Sia da risolvere l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + x(1+y)z = x(1+y),$$

che ha manifestamente la soluzione particolare $z=1$ (soluzione che otterremo col nostro metodo). Per applicare ciò che precede,

dobbiamo considerare dapprima l'equazione

$$\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

il cui integrale generale è

$$\Phi(x^2 - \lg y),$$

con Φ simbolo di funzione derivabile arbitraria. Ora abbiamo

$$\omega(x, y) \equiv x^2 - \lg y, \quad \omega_{-1}(x, y) \equiv e^{x^2 - y},$$

$$\int b(x, \omega_{-1}) dx = \int x(1 + e^{x^2 - y}) dx = \frac{1}{2}(x^2 + e^{x^2 - y}).$$

Quindi, applicando la (11), risulta che la soluzione generale dell'equazione proposta è

$$z = 1 + e^{-\frac{1}{2}(x^2 + y)} \Phi(x^2 - \lg y).$$

§ 2. Caso di tre o più variabili indipendenti.

5. Mostriamo ora come si estendono le considerazioni precedenti al caso in cui le variabili indipendenti sono tre invece di due, perchè poi l'estensione al caso di più di tre variabili indipendenti risulterà immediata.

Sappiamo che un'equazione alle derivate parziali

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} + a_1(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = 0,$$

essendo $z = z(x_0, x_1, x_2)$ la funzione incognita e $a_1(x_0, x_1, x_2)$, $a_2(x_0, x_1, x_2)$ date funzioni definite e continue in un certo campo, ha un integrale generale della forma

$$(2) \quad z = \Phi(\omega_1(x_0, x_1, x_2), \omega_2(x_0, x_1, x_2)),$$

dove $\omega_1(x_0, x_1, x_2)$, $\omega_2(x_0, x_1, x_2)$ sono particolari soluzioni di (1) e Φ è simbolo di funzione derivabile arbitraria di due variabili indipendenti. Dato che $\omega_1(x_0, x_1, x_2)$ e $\omega_2(x_0, x_1, x_2)$ sono particolari soluzioni di (1), abbiamo

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega_1}{\partial x_0} + a_1(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + a_2(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \equiv 0 \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial x_0} + a_1(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} + a_2(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \equiv 0, \end{cases}$$

da cui

$$(1) \quad \begin{cases} a_1(x_0, x_1, x_2) \equiv -\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_0, x_2)} \cdot \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_2)} \\ a_2(x_0, x_1, x_2) \equiv -\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_0)} \cdot \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_2)}. \end{cases}$$

Sarà quindi

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_2)} \equiv 0$$

e in quei punti nei quali è $\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 0$ sarà pure

$$\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_0, x_2)} = 0, \quad \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_0)} = 0.$$

Ne segue che se poniamo

$$\begin{cases} u = \omega_1(x_0, x_1, x_2) \\ v = \omega_2(x_0, x_1, x_2) \end{cases}$$

abbiamo un sistema di equazioni che definisce x_1 e x_2 come funzioni di x_0, u, v ; sia

$$\begin{cases} x_1 = \omega_{-1}(x_0, u, v) \\ x_2 = \omega_{-2}(x_0, u, v), \end{cases}$$

allora si avrà

$$\begin{cases} u = \omega_1(x_0, \omega_{-1}(x_0, u, v), \omega_{-2}(x_0, u, v)) \\ v = \omega_2(x_0, \omega_{-1}(x_0, u, v), \omega_{-2}(x_0, u, v)), \end{cases}$$

ossia

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \omega_1(x_0, \omega_{-1}(x_0, x_1, x_2), \omega_{-2}(x_0, x_1, x_2)) \\ x_2 = \omega_2(x_0, \omega_{-1}(x_0, x_1, x_2), \omega_{-2}(x_0, x_1, x_2)), \end{cases}$$

ed inoltre si avrà

$$(5) \quad \begin{cases} x_1 = \omega_{-1}(x_0, \omega_1(x_0, x_1, x_2), \omega_2(x_0, x_1, x_2)) \\ x_2 = \omega_{-2}(x_0, \omega_1(x_0, x_1, x_2), \omega_2(x_0, x_1, x_2)). \end{cases}$$

Quindi, se nel secondo membro di (2) ad x_1 si sostituisce $\omega_{-1}(x_0, x_1, x_2)$ e ad x_2 si sostituisce $\omega_{-2}(x_0, x_1, x_2)$, tale secondo membro si muta in $\Phi(x_1, x_2)$. Perciò, indicando tale doppia sostituzione mediante il simbolo

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 \\ \omega_{-1}(x_0, x_1, x_2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_2 \\ \omega_{-2}(x_0, x_1, x_2) \end{matrix} \right\},$$

dalla (2) abbiamo

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 \\ \omega_{-1}(x_0, x_1, x_2) \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_2 \\ \omega_{-2}(x_0, x_1, x_2) \end{matrix} \right\} z = \Phi(x_1, x_2).$$

Applicando poi ad ambo i membri di questa uguaglianza l'operazione D_{x_0} (di derivazione rispetto a x_0), si ottiene

$$D_{x_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z = 0.$$

Se sviluppiamo le operazioni indicate nel primo membro, risulta

$$\begin{aligned} D_{x_0} z(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)_1 z(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) + \\ &+ \frac{\partial \omega_{-1}}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_{-1}} z(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) + \frac{\partial \omega_{-2}}{\partial x_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_{-2}} z(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}), \end{aligned}$$

dove $\left(\frac{\partial}{\partial x_0} \right)_1$ indica la derivazione di z rispetto al suo primo argomento. Affinchè questa espressione coincida proprio col primo membro di (1), in essa basterà, in virtù di (5), sostituire alle x_1 e x_2 rispettivamente le funzioni ω_1 e ω_2 . Abbiamo quindi che l'equazione (1) si potrà scrivere così:

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} D_{x_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z = 0;$$

concludiamo cioè con la formula

$$(6) \quad \frac{\partial z}{\partial x_0} + a_1(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} D_{x_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z.$$

7. Osserviamo che dal n°. precedente sono risultati per i coefficienti di (1) le espressioni

$$(7) \quad \begin{cases} a_1(x_0, x_1, x_2) = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \omega_{-1}}{\partial x_0} \\ a_2(x_0, x_1, x_2) = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \omega_{-2}}{\partial x_0}, \end{cases}$$

e confrontando con (3) abbiamo le formule

$$(8) \quad \begin{cases} -\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_0, x_2)} \cdot \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \omega_{-1}}{\partial x_0} \\ -\frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_0)} \cdot \frac{\partial(\omega_1, \omega_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} \frac{\partial \omega_{-2}}{\partial x_0}. \end{cases}$$

8. Applichiamo ora la decomposizione ottenuta, data da (6), alla risoluzione dell'equazione alle derivate parziali, di 1° ordine, to-

talmente lineare e completa,

$$(9) \frac{\partial z}{\partial x_0} + a_1(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial z}{\partial x_2} + b(x_0, x_1, x_2) z = f(x_0, x_1, x_2),$$

essendo $a_1(x_0, x_1, x_2)$, $a_2(x_0, x_1, x_2)$, $b(x_0, x_1, x_2)$, $f(x_0, x_1, x_2)$ date funzioni definite e continue in un certo campo. Per la (6) il primo membro di (9) si può scrivere

$$(10) \quad \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} D_{x_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z + b(x_0, x_1, x_2) z,$$

ma è

$$\begin{aligned} b(x_0, x_1, x_2) z &= \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} b(x_0, x_1, x_2) z = \\ &= \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z, \end{aligned}$$

onde (10) diventa

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} D_{x_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z + \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z = \\ = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} [D_{x_0} + b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2})] \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z \end{aligned}$$

ed avendosi

$$D_{x_0} + b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) = e^{\frac{-\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0}{D_{x_0} e}} \frac{\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0}{D_{x_0} e}$$

(dove l'integrale indefinito del secondo membro indica solo una sua determinazione), si conclude che (9) si può porre sotto la forma

$$(9') \quad \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} e^{-\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0} D_{x_0} e^{\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} z = f(x_0, x_1, x_2).$$

Invertendo successivamente le varie operazioni del primo membro, si ottiene subito

$$(11) \quad z = \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} e^{-\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0} D_{x_0}^{-1} e^{\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} f(x_0, x_1, x_2)$$

dove $D_{x_0}^{-1}$ va interpretato in tutta la sua generalità: indicando precisamente con L_{x_0} una particolare specificazione di $D_{x_0}^{-1}$ e con

$\Phi(x_1, x_2)$ una funzione arbitraria di x_1 e x_2 , abbiamo

$$z(x_0, x_1, x_2) = \frac{\left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} e^{-\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0} \int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0}{I_{x_0} e^{\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_{-1} & \omega_{-2} \end{matrix} \right\} \Phi(x_1, x_2) +} \\ + \Phi(\omega_1, \omega_2) \left\{ \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \omega_1 & \omega_2 \end{matrix} \right\} e^{-\int b(x_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}) dx_0}$$

Questa formula risolutiva mette in luce chiaramente che la risoluzione dell'equazione completa (9) si riconduce alla risoluzione dell'equazione omogenea (1); e ciò è assai più semplice che ricondurre la (9), come si fa, alla risoluzione dell'equazione omogenea (in quattro variabili indipendenti x_0, x_1, x_2, z)

$$\frac{\partial u}{\partial x_0} + a_1(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_0, x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \\ + [f(x_0, x_1, x_2) - b(x_0, x_1, x_2)z] \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

9. Il caso più generale delle considerazioni precedenti si ha partendo da un'equazione alle derivate parziali della forma

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} + \sum_1^n a_i(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0,$$

il cui integrale generale è del tipo

$$z(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Phi(\omega_1(x_0, x_1, \dots, x_n), \dots, \omega_n(x_0, x_1, \dots, x_n)),$$

dove $\omega_1(x_0, x_1, \dots, x_n), \dots, \omega_n(x_0, x_1, \dots, x_n)$ sono n particolari soluzioni dell'equazione e Φ è simbolo di funzione arbitraria di n variabili indipendenti.

Procedendo analogamente al n° 6 s'individuano le funzioni $\omega_{-1}(x_0, x_1, \dots, x_n), \dots, \omega_{-n}(x_1, \dots, x_n)$, e s'otterrà pel primo membro dell'equazione la seguente espressione:

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} + \sum_1^n a_i(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\left\{ \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ \omega_1 \dots \omega_n \end{matrix} \right\} D_{x_0} \left\{ \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ \omega_{-1} \dots \omega_{-n} \end{matrix} \right\} z.}{\left\{ \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ \omega_1 \dots \omega_n \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ \omega_{-1} \dots \omega_{-n} \end{matrix} \right\}}$$

Ne segue poi subito la formula risolutiva dell'equazione completa

$$\frac{\partial z}{\partial x_0} + \sum_1^n a_i(x_0, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} + b(x_0, x_1, \dots, x_n)z = f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$