Bollettino Unione Matematica Italiana

Ermanno Marchionna

Un complemento del teorema dell' $Af + B\varphi$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 368–370.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_368_0>

Un complemento del teorema dell' $Af + B\varphi$.

Nota di ERMANNO MARCHIONNA (a Milano).

Sunto. - *Si presenta un semplice complemento del celebre teorema di* NÖTHER *sull'* $Af + B\varphi$, *relativo ad una curva che passi per i punti comuni ad* f *e* φ *con molteplicità inferiore al normale.*

1. La caratterizzazione delle curve gobbe intersezioni complete di due superficie generali è risolta da due noti teoremi di VALENTINER ed HALPHEN.

La dimostrazione di questi due teoremi può essere basata, rispettivamente, sullo studio delle divisioni successive che compaiono nella ricerca del massimo comun divisore di due polinomi e sulla ricostruzione delle medesime per mezzo del teorema di NÖTHER, il quale fornisce appunto l'operazione inversa della divisione ([1]).

Ora io ho cercato, seguendo tale via, di estendere i teoremi di VALENTINER ed HALPHEN nel caso in cui una curva sia intersezione completa di due superficie aventi un punto multiplo comune, e per raggiungere lo scopo ho dovuto procurarmi un'estensione del teorema di NÖTHER.

Tale estensione, che non ho altrove trovato sebbene sia fondata su considerazioni assai semplici, s'è dimostrata efficace strumento di ricerca, e pertanto può avere di per sè un certo interesse.

2. Ricordiamo che il teorema di NÖTHER sull' $Af + B\varphi$ relativo alle curve piane si suole enunciare come ségue ([2]):

« Una curva θ la quale passi con la molteplicità $r \geq i + l - 1$ per ogni punto P comune a due curve f e φ, che sia i-plo per f ed l-plo per φ ([3]), è una combinazione lineare del tipo

$$\theta = Af + B\varphi$$

dove A e B sono due nuove curve passanti per P con le molteplicità $r - i$, $r - l$ ».

([1]) Cfr. C. TIBILETTI, *Sulle curve intersezioni complete di due superficie*, « Annali di Matematica », (di prossima pubblicazione).

([2]) Cfr. ENRIQUES-CHISINI, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. III, pag. 131, oppure SEVERI: *Trattato di Geometria Algebrica*, pag. 335.

([3]) Tale condizione s'intende estesa a tutti i punti multipli, distinti o infinitamente vicini, comuni ad f e φ.

In sostanza il teorema di NÖTHER impone la condizione che le molteplicità delle curve f, φ, θ in un loro punto comune soddisfino la relazione $i + l - r \leq 1$.

Ora io ho cercato di stabilire un criterio (sufficiente) che permetta di scrivere la curva θ come combinazione di f e φ anche quando la suddetta relazione non sia soddisfatta.

Tale criterio è il seguente:

Una curva θ *(d'ordine* g*) passi con la molteplicità* r *per ogni punto* P *comune a due curve* f *e* φ *(d'ordini rispettivi* m *ed* n*) che sia* i*-plo per* f *ed* l*-plo per* φ. *Inoltre nei punti* P *in cui è* $\mathrm{i} + \mathrm{l} - \mathrm{r} > 1$ *si abbia*

$$g - r < (m - i) + (n - l);$$

si può scrivere allora

$$\theta = Af + B\varphi$$

ove A *e* B *sono due nuove curve passanti per i punti* P *con le molteplicità rispettive* $\mathrm{r} - \mathrm{i}$, $\mathrm{r} - \mathrm{l}$.

3. Se in ogni punto P fosse $i + l - r \leq 1$, varrebbe il teorema di NÖTHER e si potrebbe scrivere senz'altro $\theta = Af + B\varphi$.

Supponiamo invece in un punto P^* comune alle tre curve suddette sia $s = i + l - r > 1$. Sommiamo allora alla curva θ una curva γ composta di $s - 1$ rette generiche passanti per P^*.

Otteniamo allora una curva $\gamma\theta$ avente in P^* molteplicità

$$r + s - 1 = i + l - 1.$$

Per il teorema di NÖTHER si può quindi scrivere

$$\gamma\theta = A'f + B'\varphi$$

ove B' è una curva d'ordine $g + (s - 1) - n$ la quale passa per P^* con la molteplicità $i - 1$.

Ora la curva $B'\varphi$ deve passare come le curve θ ed f per ognuno dei gruppi G (di $m - i$ punti) staccati sulla curva f (fuori di P^*) dalle rette di γ.

Poichè per tali punti non passa la φ, dovrà passarvi la B'.

Segue che ogni retta di γ ha in comune con B'

$$(i - 1) + (m - i) = m - 1$$

punti. D'altra parte si ha per ipotesi

$$g - r < (m - i) + (n - l)$$

per cui è

$$g + s = g + (i + l - r) < m + n;$$

di conseguenza il numero $m-1$ supera l'ordine $g+(s-1)-n$ della B', e questa contiene ogni retta di γ.

Si ha perciò $B' = \gamma B$, (ove B è una curva passante per P^* con la molteplicità $r-l$), e quindi

$$\gamma\theta = A'f + \gamma B\varphi.$$

Di qui segue che, poichè f non contiene γ, è $A' = \gamma A$, ed infine

$$\theta = Af + B\varphi$$

essendo A una curva avente in P^* la molteplicità $r-i$.