BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Cataldo Agostinelli

Le equazioni canoniche del moto di un sistema anolonomo come sistema associato a un determinato pfaffiano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.4, p. 345–348.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_4_345_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Le equazioni canoniche del moto di un sistema anolonomo come sistema associato a un determinato pfaffiano.

Nota di CATALDO AGOSTINELLI (a Torino).

Sunto. - *Si dimostra come, analogamente a quanto avviene per le equazioni canoniche del moto di un sistema olonomo, anche le equazioni del moto di un sistema anolonomo, ridotte a forma canonica, si possono ottenere come sistema associato a un determinato pfaffiano.*

1. Consideriamo un sistema materiale la cui posizione in ogni istante si possa individuare mediante n parametri lagrangiani $q_1, q_2, \dots, q_n$, sollecitato da forze derivanti da un potenziale

$$U(t, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

e sottoposto inoltre ad $m < n$ vincoli di mobilità anolonomi.

Introducendo $n-m$ *caratteristiche cinetiche* $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-m}$, questi vincoli si possono esprimere, come si sa, mediante relazioni della forma

$$\dot{q}_r = \sum_0^{n-m}{}_h \beta_{rh}\omega_h, \qquad (r = 1, 2, \dots, n;\ \omega_0 = 1) \tag{1}$$

ove i coefficienti β_{rh} sono funzioni delle q e di t. La (1) sarà valida anche per $r = 0$, con le convenzioni:

$$\beta_{00} = 1; \quad \beta_{0h} = 0; \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \dots, n-m; \qquad q_0 = t;\ \dot{q}_0 = \omega_0 = 1.$$

Ponendo $d\xi_h = \omega_h dt$, ove le $d\xi_h$ sono differenziali di *quasi coordinate* nel senso di WHITTAKER [1], le (1) si possono scrivere anche

$$dq_r = \sum_0^{n-m}{}_h \beta_{rh} d\xi_h, \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n;\ dq_0 = d\xi_0 = dt). \tag{1'}$$

Detta ora $T = \frac{1}{2}\sum_0^n{}_{rs}\, a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s$, la forza viva del sistema, in virtù delle (1) essa assume la forma

$$T^* = \frac{1}{2}\sum_0^{n-m}{}_{hk}\alpha_{hk}\omega_h\omega_k, \quad \text{con} \quad \alpha_{hk} = \sum_0^n{}_{rs}\, a_{rs}\beta_{rh}\beta_{sk}$$

(1) E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics*, « Cambridge University Press », p. 41, 1927.

e le equazioni del moto del sistema risultano ([2])

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^*}{\partial\omega_h}\right)-\frac{\delta(T^*+U)}{\delta\xi_h}+\sum_0^{n-m}{}_{jk}\,\gamma_{j,hk}\omega_j\omega_k=0,\quad (h=1,2,\dots,n-m),$$

ove, avuto riguardo alle (1'), si è indicata con $\frac{\delta}{\delta\xi_h}$ l'operazione differenziale

$$\frac{\delta}{\delta\xi_h}=\sum_0^n{}_r\,\beta_{rh}\frac{\partial}{\partial q_r},\qquad (h=0,1,2,\dots,n-m),$$

ed è inoltre

$$\gamma_{j,hk}=\sum_0^n{}_{rs}a_{rs}\beta_{rj}\left(\frac{\delta\beta_{sk}}{\delta\xi_h}-\frac{\delta\beta_{sh}}{\delta\xi_k}\right)=-\gamma_{j,kh}.$$

Ponendo ancora

$$p_h=\frac{\partial T^*}{\partial\omega_h},\ (h=1,2,\dots,n-m;\quad H=\sum_1^{n-m}{}_h\,p_h\omega_h-(T^*+U),$$

le (2) equivalgono al sistema di $2(n-m)$ equazioni canoniche

$$(3)\qquad \omega_h=\frac{\partial H}{\partial p_h};\quad \frac{dp_h}{dt}+\frac{\delta H}{\delta\xi_h}+\sum_0^{n-m}{}_{jk}\,\gamma_{j,hk}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial p_k}=0,\quad (h=1,2,\dots,n-m),$$

nelle quali la *funzione caratteristica* H va espressa in termini delle q e delle p, ed ove per convenzione è $\frac{\partial H}{\partial p_0}=\omega_0=1$.

Alle (3) vanno naturalmente associate le equazioni (1) dei vincoli che ora diventano

$$\dot q_r=\sum_0^{n-m}{}_h\,\beta_{rh}\frac{\partial H}{\partial p_h},\qquad (r=1,2,\dots,n).$$

2. Vogliamo ora vedere come il sistema di equazioni canoniche (3) coincide col sistema di equazioni associate al pfaffiano

$$(4)\qquad \psi_d=\sum_1^{n-m}{}_h\,p_h d\xi_h-Hdt,$$

ove la H si consideri funzione delle p_h e delle quasi coordinate ξ_h.

Infatti il *covariante bilineare* ([3]) Φ del pfaffiano (4) è espresso da

$$\Phi=\sum_1^{n-m}{}_h(\delta p_h d\xi_h-dp_h\delta\xi_h)+\sum_1^{n-m}{}_h\,p_h(\delta d\xi_h-d\delta\xi_h)-\delta H\cdot dt+dH\cdot\delta t.$$

([2]) Vedi ad es. C. AGOSTINELLI, *Sistemi anolonomi a caratteristiche cinetiche separate, ecc.*, (« Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena », vol. II, 1947-48). Idem, *Sull'applicabilità del motodo di Jacobi della meccanica analitica ai sistemi anolonomi.* (In corso di stampa nei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei »).

([3]) Per le considerazioni sui pfaffiani e i relativi covarianti bilineari vedi ad es.: T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol. II, P. II. Zanichelli, Bologna, 1927.

Poichè

$$\delta d\xi_0 - d\delta\xi_0 = \delta dt - d\delta t = 0, \qquad p_h = \frac{\partial T^*}{\partial\omega_h} = \sum_0^{n-m}{}_k\, \alpha_{hk}\omega_k,$$

si ha successivamente

$$\sum_1^{n-m}{}_h\, p_h(\delta d\xi_h - d\delta\xi_h) = \sum_0^{n-m}{}_{hk}\, \alpha_{hk}\omega_k(\delta d\xi_h - d\delta_h) =$$

$$= \sum_0^{n-m}{}_{hk} \sum_0^{n-m}{}_{rs}\, a_{rs}\beta_{rh}\beta_{sk}\omega_k(\delta d\xi_h - d\delta\xi_h) =$$

$$= \sum_0^{n-m}{}_{hh} \sum_0^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\beta_{sk}\omega_k[\delta(\beta_{rh}d\xi_h) - d(\beta_{rh}\delta\xi_h)] -$$

$$- \sum_0^{n-m}{}_{hk} \sum_0^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\beta_{sk}\omega_k(\delta\beta_{rh}\; d\xi_h - d\beta_{rh}\cdot\delta\xi_h).$$

Ma

$$\sum_0^{n-m}{}_k\, [\delta(\beta_{rh}d\xi_h) - d(\beta_{rh}\delta\xi_h)] = \delta dq_r - d\delta q_r = 0,$$

segue perciò facilmente

$$\sum_1^{n-m}{}_h\, p_h(\delta d\xi_h - d\delta\xi_h) = -\sum_0^{n-m}{}_{jhk}\, \omega_k \sum_0^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\beta_{sk}\left(\frac{\delta\beta_{rj}}{\delta\xi_h} - \frac{\delta\beta_{rh}}{\delta\xi_j}\right)d\xi_j\delta\xi_h$$

cioè

$$\sum_1^{n-m}{}_h\, p_h(\delta d\xi_h - d\delta\xi_h) = -\sum_0^{n-m}{}_{jhk}\, \gamma_{j,hk}\omega_j d\xi_k\delta\xi_h.$$

Esplicitando il δH risulta

$$\delta H = \sum_0^{n-m}{}_h \frac{\delta H}{\delta\xi_h}\delta\xi_h + \sum_1^{n-m}{}_h \frac{\partial H}{\partial p_h}\delta p_h = \frac{\delta H}{\delta\xi_0} + \sum_1^{n-m}{}_h\left(\frac{\delta H}{\delta\xi_h}\delta\xi_h + \frac{\partial H}{\partial p_h}\delta p_h\right)$$

e quindi infine si ha

$$\Phi = \sum_1^{n-m}{}_h\,(\delta p_h d\xi_h - dp_h\delta\xi_h) - \sum_1^{n-m}{}_h \sum_0^{n-m}{}_{jk}\, \gamma_{j,hk}\omega_j d\xi_k\delta\xi_h - \sum_0^{n-m}{}_{jk}\, \gamma_{j,0k}\omega_j d\xi_k\delta t$$
$$- \left[\frac{\delta H}{\delta\xi_0}\delta t + \sum_1^{n-m}{}_h\left(\frac{\delta H}{\delta\xi_h}\delta\xi_h + \frac{\partial H}{\partial p_h}\delta p_h\right)\right]dt + dH\cdot\delta t.$$

Il sistema associato al pfaffiano (4) è, com'è noto ([4]), quello che esprime le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il corrispondente covariante bilineare Φ sia identicamente nullo per ogni scelta arbitraria degli incrementi

$$\delta p_h, \quad \delta\xi_h, \quad (h = 1, 2, \ldots, n-m), \quad \delta\xi_0 \equiv \delta t.$$

Detto sistema associato, che al pari del covariante bilineare da cui deriva, è invariante di fronte a ogni cambiamento di variabili,

([4]) Vedi T. Levi-Civita e U. Amaldi, *loco citato*, in ([3]).

è dunque nel nostro caso:

$$d\xi_h - \frac{\partial H}{\partial p_h} dt = 0, \quad dp_h + \sum_{0}^{n-m}{}_{jk} \gamma_{j,hk} \omega_j d\xi_k + \frac{\delta H}{\delta \xi_h} dt = 0, \tag{5}$$

$$(h = 1, 2, \dots, n \quad m),$$

$$dH - \frac{\delta H}{\delta \xi_0} dt - \sum_{0}^{n-m}{}_{jk} \gamma_{j,0k} \omega_j d\xi_k = 0. \tag{6}$$

Ora, poichè $d\xi_h = \omega_h dt$, le (5) coincidono proprio con le equazioni canoniche (3). La (6) è poi conseguenza delle precedenti.

Invero, tenendo conto delle equazioni canoniche si ha successivamente

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{0}^{n-m}{}_k \frac{\delta H}{\delta \xi_k} \omega_k + \sum_{1}^{n-m}{}_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \xi_0} + \sum_{1}^{n-m}{}_k \omega_k \left(\frac{dp_k}{dt} + \frac{\delta H}{\delta \xi_k} \right) =$$

$$= \frac{\delta H}{\delta \xi_0} - \sum_{1}^{n-m}{}_k \sum_{0}^{n-m}{}_{jh} \gamma_{j,kh} \omega_j \omega_h \omega_k .$$

Ma

$$\sum_{1}^{n-m}{}_{hk} \gamma_{j,kh} \omega_h \omega_k = 0, \qquad \text{poichè} \qquad \gamma_{j,kh} = -\gamma_{j,hk},$$

ne segue

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\delta H}{\delta \xi_0} + \sum_{0}^{n-m}{}_j \sum_{1}^{n-m}{}_k \gamma_{j,0k} \omega_j \omega_k ,$$

che non differisce dalla (6) quando si osservi che $\gamma_{j,00} = 0$.

Ne concludiamo che le equazioni del moto di un sistema anolonomo ridotte alla forma canonica (3), coincidono col sistema associato al pfaffiano (4).