Giulio Supino

Geometria del disegno e approssimazione numerica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 307–310.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_307_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Geometria del disegno e approssimazione numerica.

Nota di GIULIO SUPINO (a Bologna).

(Continuazione dal numero precedente)

Sunto. - *Si espongono, con osservazioni critiche, le ricerche sulla « geometria del disegno » del* KLEIN *e della sua Scuola.*

6. – Ritorniamo alla discussione generale, riferendoci dapprima ad un esempio semplice che tolgo da un articolo di ENRIQUES (1). Invece del teorema « gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono eguali » consideriamo l'enunciato « Se due lati a e b di un triangolo differiscono per meno di δ, gli angoli opposti α e β differiscono per meno di ε ». *La formula differenziale* è in questo caso facilmente assegnabile

$$\operatorname{sen} \beta - \operatorname{sen} \alpha = \frac{\delta}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha$$

cioè posto $\beta = \alpha - \varepsilon$ e a meno di infinitesimi di ordine superiore

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} \cdot \delta .$$

Ma a questo punto si pone una questione essenziale. Che cosa ha questa fosmula differenziale che sia *caratteristico* della geometria del disegno? essa può ottenersi senza introdurre nessun concetto probabilistico e non ha neppure uno specifico riferimento grafico. Un triangolo che abbia un vertice nell'origine $0 \equiv (0, 0)$, un secondo nel punto A (1, 1), il terzo nel punto B $(0, \sqrt{2})$ è isoscele perchè i lati OA e OB sono eguali. Ma se, per eseguire un calcolo numerico, si sostituisce il punto $(0, \sqrt{2})$ col punto (0; 1, 41) si commette un errore che si ripercuote su gli angoli del triangolo, e che la formula differenziale dà il modo di apprezzare.

Se in geodesia e nella astronomia di posizione si cercano formule differenziali per dedurre dall'errore « probabile » dei dati, l'errore « probabile » dei risultati, ciò non implica che sia questo il loro campo esclusivo: che anzi tutte le ricerche meccaniche sulla stabilità del moto, fondate su *equazioni alle variazioni* danno luogo in ultima analisi a formule differenziali. Ma vi è anche una

(1) Cfr. F. ENRIQUES: *Alcune osservazioni generali sui problemi geometrici* « In questioni riguardanti le matematiche elementari » 3ª ed. Bologna 1926 (l'articolo è apparso la prima volta nella 2ª ed., Bologna 1913-1914).

seconda osservazione. Se si vogliono individuare analiticamente sei punti di una conica si dovranno dare sei coppie di coordinate che potranno anche essere espresse da numeri reali (non razionali). Questi saranno introdotti nei calcoli con una rappresentazione approssimata sicchè non avremo dato punti sulla conica, ma punti vicini a quella. In tal caso i tre punti intersezione dei lati opposti dell'esagono non saranno allineati e *potremo renderci conto* di questo scrivendo l'area del triangolo che ha i vertici nei tre punti e verificando che *non è zero*.

Invece se si segna sul foglio un punto isolato, si segna un circoletto o un quadratino (cioè tutto un insieme di punti matematici) e questo insieme di puuti contiene *anche* quello che noi vogliamo segnare; se si congiungono due punti con una retta, si congiungono due circoletti con una striscia che ha un certo spessore (e anzi se il disegno è condotto correttamente ha lo stesso spessore dei circoletti) striscia che contiene la retta «vera» anche se, per errore questa non è proprio la mediana della striscia tracciata.

Se segnamo un cerchio col compasso, la linea disegnata ha un certo spessore, sicchè il cerchio include infiniti cerchi matematici. Su questo cerchio «disegnato» si segnino ora sei punti «disegnati» rappresentati cioè da circoletti di una certa area. Se su ciascuno di questi punti disegnati fisso mèntalmente un punto matematico potrà ben essere che la sestupla scelta non contenga nessun cerchio matematico. Ma il procedimento grafico non consiste nel fissare mentalmente un punto matematico — Graficamente si continua la costruzione con i punti «disegnati» sul cerchio ed in essi vi sono infinite sestuple di punti che si trovano su cerchi matematici (contenuti in numero infinito sul cerchio disegnato). L'esagono disegnato ha i lati opposti che si incotrano in tre punti di una retta disegnata e questa contiene tutta una serie di rette matematiche. Ora queste rette provengono da esagoni iscritti nei differenti cerchi matematici compresi entro il cerchio disegnato: non è vero che la costruzionoe grafica del teorema di Pascal porti a tre punti non in linea retta: essa porta a tre punti disegnati che possono essere congiunti con una retta disegnata: l'errore, se c'è, *resta inavvertito all'occhio e agli strumenti*. Ma vi è di più: non è detto che *tutte* le rette matematiche provenienti dagli infiniti cerchi inclusi in quello disegnato siano comprese entro la retta di Pascal disegnata: può essere che altre rette sfuggano dal disegno o, per essere più esatti, che il disegno acquisti una certa *indeterminazione* man mano che si procede con le successive costruzioni: ciò effettivamente costituisce il caso più frequente come ci si rende subito conto se si pensa per il teorema di Pascal ad un enunciato del tipo che segue (che è quello corretto dal punto di vista grafico):

« Supposto di considerare insieme ad una conica tutte quelle i cui punti distino dalla data per meno di δ quale è il luogo di tutte le rette di PASCAL relative a queste coniche? Se esse sono tutte con*tenute in una striscia di spessore ε che relazione c'è tra δ ed ε ?* ».

Ma la risposta a questa domanda non potrebbe essere data altro che considerando la *costruzione* da eseguire per passare dall'esagono alla retta; se vi sono due costruzioni diverse per ottenere lo stesso risultato, l'errore è differente nei due casi (e questa osservazione ci riporta al LEMOINE).

La valutazione dell'errore di una costruzione grafica costituisce il parallelo della valutazione dell'errore di una operazione aritmetica nel calcolo numerico

7. – A questo punto ci resta da considerare i procedimenti che possono essere seguiti per valutare l'errore della costruzione grafica. Un procedimento è basato su criteri probabilistici; è in sostanza quello del NITZ e può essere applicato considerando le formule (1). (2), (3). Un secondo è valutato sul criterio di maggiorare l'errore. Se due rette si intersecano, l'errore massimo che normalmente e *inavvertitamente* si può fare nel valutare il punto intersezione può essere rappresentato da l'ellisse inscritta nel parallelogrammo intersezione delle due rette. Se si assumono le due rette come assi coordinati e si indicano con δ_1, δ_2 i lati del parallelogramma l'errore di posizione di una direzione che formi l'angolo ψ rispetto a δ_1 è dato da

(1′) $$\varepsilon = \frac{\delta_1 \cos(\psi - \omega) + \delta_2 \cos\psi}{\operatorname{sen}\omega}$$ (ω angolo acuto tra le due rette)

Analogamente se 0_1 e 0_2 sono individuati a mezzo di due ellissi l'errore angolare è dato da

(2′) $$\operatorname{sen}\theta = \frac{\delta_1 - \delta_2}{d}$$

essendo δ_1 e δ_2 i semidiametri dell'elisse in direzione normale alla congiungente $\overline{0_1 0_2}$ (la cui lunghezza è uguale a d). Infine l'errore di posizione di un punto P nella retta $\overline{0_1 0_2}$ è dato da

(3′) $$\varepsilon = \delta_1(1 - p/d) + \delta_2(p/d)$$

dove $p = \overline{0_1 P}$.

Queste formule sono analoghe a quelle del NITZ, ma non tengono conto di criteri probabilistici.

8. – Potrà apparire strano questo dubbio sul carattere probabilistico dell'errore grafico, ma effettivamente non si può pensare che questo sia dovuto a cause soltanto (o prevalentemente) accidentali in modo da poter applicare ad esso la teoria di GAUSS.

Già il NITZ ha dovuto eliminare dalle sue cosiderazioni gli errori strumentali (che invece potrebbero restare inclusi nelle formule del n° 7) limitandosi agli errori «soggettivi» del disegnatore.

Ma è chiaro che anche questi non si possono chiamare propriamente accidentali: il disegnatore conosce la costruzione che eseguisce, ha in mente l'aspetto generale delle linee che devono scaturire dal suo lavoro ed è portato più o meno inconsciamente, a dare ad esse quell'aspetto che egli ha già in mente. E questo anche quando non sia portato a ciò da ragioni particolari che pure hanno il loro peso. Chi calcola un arco elastico sa che la condizione più favorovole per la sua resistenza è che la linea delle pressioni si distacchi il meno possibile dall'arco e sa che se ottiene questa condizione favorevole il suo arco è verificato e i calcoli sono terminati, mentre nel caso opposto egli dovrebbe progettare un altro arco diverso nella forma o nello spessore) e ripetere di nuovo tutto il calcolo di verifica. In queste condizioni parlare di errori «accidentali» mi sembra del tutto improprio.

9. - Potrà sembrare che queste condizioni siano troppo sfavorevoli al calcolo grafico. Ma gli errori provocati dai metodi grafici sono oramai ben noti a chi li abbia un poco sperimentati ([2]). Es ist eine ganz andere Sache — scriveva J. STEINER nel 1833 — die Konstruktionen in der That, d.h. mit den Instrumenten in der Hand, oder, um mich des Austrucks zu bedienen, bloss mittels der Zunge auszufuhren ([3]).