Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Tenca

Risoluzione dei problemi geometrici con la piegatura del foglio

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 288–298.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_288_0>

Risoluzione dei problemi geometrici con la piegatura del foglio.

Nota di LUIGI TENCA (a Firenze)

Sunto. - *Viene esposto, in forma riassuntiva, il metodo di risoluzione dei problemi geometrici per mezzo della piegatura del foglio, metodo che nella sua trattazione generale è poco conosciuto e quindi poco usato ed apprezzato.*

1. Alcuni anni sono (alla fine del secolo ultimo scorso e al principio di questo) erano tornate di attualità le questioni relative alla risoluzione dei problemi geometrici usando mezzi diversi, traendo ispirazione dalla *Geometria del Compasso* di LORENZO MASCHERONI, pubblicata a Pavia nel 1797, e da ricerche precedenti, specialmente di matematici italiani.

Si studiarono le risoluzioni possibili usando il solo compasso, la squadra vera o falsa, due squadre, la riga a due orli, ecc., la sola riga, ricorrendo poi anche, come sussidio della riga, al compasso ad apertura fissa, al compasso comune, al compasso ellittico, iperbolico, parabolico, a un trisettore di angoli, ad un duplicatore del cubo, a strumenti per la generazione della concoide di NICOMEDE, al mesolabio, ad un integrafo, ecc., oppure, sempre come sussidio della riga, ad una figura data nel foglio del disegno, ad esempio a due rette parallele o fra loro perpendicolari, a un parallelogramma, un quadrato, una circonferenza, un'ellisse, un'iperbole, una parabola ecc. [1].

[1] Vedi, anche per la bibliografia:

I) In « *Questioni riguardanti le matematiche elementari* » di F. ENRIQUES. Bologna, Zanichelli. 1925, i seguenti articoli:

a) E. DANIELE. *Sulla risoluzione dei problemi geometrici col solo compasso.*

b) A. GIACOMINI. *Sulla risoluzione dei problemi geometrici colla riga e cogli strumenti lineari: contributo della geometria proiettiva.*

c) G. CASTELNUOVO. *Sulla risoluzione dei problemi geometrici cogli strumenti elementari: contributo della geometria analitica.*

d) F. ENRIQUES. *Sulle equazioni algebriche risolubili per radicali quadratici e sulla costruibilità dei poligoni regolari.*

e) F. ENRIQUES. *Osservazioni sui problemi geometrici.*

f) A. CONTI. *Problemi di 3° grado. Duplicazione del cubo. Trisezione dell'angolo.*

g) A. SABBATINI. *Sui metodi elementari per la risoluzione dei problemi geometrici.*

Alcuni insegnanti consigliano molti di questi esercizi come adatti e istruttivi per gli alunni delle scuole secondarie superiori e, ampliando la trattazione, per quelli universitari. Ad esempio, F. ENRIQUES nel suo testo di *Geometria per le scuole secondarie superiori* (Bologna, Zanichelli, 1905) propone, come esercizi, la risoluzione di problemi usando il solo compasso o la riga a due orli.

Non ci risulta invece consigliata in nessun testo la risoluzione sistematica dei problemi geometrici ricorrendo alla piegatura del foglio, esercizi pure istruttivi ed interessanti, la questione è ora quasi dimenticata: ne trattò anni sono, in un suo corso di matematiche complementari, la Prof. M. PIAZZOLLA BELOCH della Università di Ferrara (2).

Alcuni autori di libri di testo di geometria per le scuole elementari e per le scuole secondarie inferiori e alcuni insegnanti ricorrono alle volte alla piegatura per verificare, nella geometria piana, proprietà sull'eguaglianza di segmenti, di angoli, di poligoni e sull'equivalenza di poligoni; alcuni autori di libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori ricorrono alle volte alla piegatura per illustrare il contenuto di alcuni postulati, per dimostrazioni intuitive.

I coniugi YOUNG nella loro graziosa «Geometria per i piccoli» per l'insegnamento elementare e prescolastico (G. C. YOUNG e W. H. YOUNG. *The first Took of geometry.* Traduzione italiana di L. VIRIGLIO, Torino, Ed. Paravia, 1911) fanno largo uso della piegatura del foglio come mezzo per costruire solidi, senza ricorrere alla gomma, col vantaggio che, usati i solidi per il loro studio, i giovani possono sviluppare nel piano le superficie e mettere i fogli ottenuti in una cartella, dove non si sciupano e in co-

II) In «*Enciclopedia delle matematiche elementari*» di L. BERZOLARI, G. VIVANTI, D. GIGLI - Milano, Hoepli, 1937.

a) A. AGOSTINI, *I problemi geometrici elementari e i problemi classici.*

b) E. A. TOGLIATTI. *Risoluzione grafica di equazioni di 2°, 3°, 4° grado ed altre equazioni particolari.*

(2) *a*) M. PIAZZOLLA BELOCH. *Alcune applicazioni del metodo del ripiegamento della carta di Sundara Row.* «Atti dell'Acc. di Scienze Mediche. Naturali e Matematiche di Ferrara» Serie II, Vol. XI, 1934.

b) M. PIAZZOLLA BELOCH. *Sul metodo del ripiegamenio della carta per la risoluzione dei problemi geometrici.* «Periodico di Matematiche», Serie VI, Vol. XVII, 1936, pag. 104.

c) M. PIAZZOLLA BELOCH. *Sulla risoluzione dei problemi di 3° e 4° grado col metodo del ripiegamento della carta.* Scritti matematici offerti a Luigi BERZOLARI. Pavia, «Istituto di matematica della Università», 1936, pag. 93.

modo e piccolo spazio si possono raccogliere molti modelli. Detti Autori si servono inoltre della piegatura per la verifica sperimentale di proprietà elementari dell'eguaglianza e della equivalenza piana e per la risoluzione di alcuni problemi geometrici elementari.

All'inizio del suo uso la piegatura della carta (chiamiamola così in forma generica) ha carattere di giuoco e pare che l'origine di questi giuochi (costruzione di uccelli, di ranocchi, di barche, di cappelli, di ventagli, di lampioncini, ecc.) sia in Cina: il più antico accenno trovato da G. VACCA (3) è in TU FU che visse dal 712 al 770 dopo Cristo.

Si usò dapprima carta atto cigliata, poi piegata, intrecciata, allargando a mano a mano il campo e la precisione delle costruzioni col migliorarsi della produzione della carta stessa, passando alla risoluzione sistematica di problemi geometrici con varietà di metodi.

Di tali giuochi capì presto l'alto valore formativo per i bambini FEDERICO FRÖBEL (3). Il primo libro di geometria che in Europa ne fa largo uso sembra essere quello (3) di DIONYSIUS LARDNER (1840); in Italia per primo ne fece uso sistematico P. PASQUALI (1889) nella sua *Geometria Intuitiva senza strumenti* (3). Inoltre era molto usata la piegatura nei ben organizzati Corsi di Lavoro Manuale che venivano tenuti a Ripatransone (Ascoli) alla fine del secolo passato e all'inizio di questo e in altri Corsi di Lavoro Manuale sorti in altre città d'Italia in quel tempo, (ad imitazione di quello di Ripatransone), per gli insegnanti elementari. Non si deve dimenticare che già nel secolo XVII in Italia il D'AVISO (4)$_a$ aveva usata l'intrecciatura della carta per la costruzione del pentagono e dell'esagono regolari.

Sull'argomento della piegatura della carta conosciamo una bigliografia limitata (4). Alcuni riguardano ancora la questione

(3) G. VACCA. *Della piegatura del foglio applicata alla geometria.* « Periodico di Matematiche ». Serie IV, Vol. X, 1930, pa.g 43. (Anche per la parte bibliografica).

(4) Oltre le pubblicazioni citate della Prof. M. PIAZZOLLA BELOCH, dei coniugi YOUNG, di G. VACCA, vedi:

a) U. D'AVISO. *Trattato della sfera. Pratiche astronomiche. Le misure celesti* (Opera ricavata dai manoscritti di P. BONAVENTURA CAVALIERI). Roma, Muscarduna, 1682, pag. 255.

b) F. KLEIN. *Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus.* Bd. II, s. 267. Berlin, Springer, 1926.

c) I. SUNDARA ROW. *Geometrie exercices in Paper Folding.* Madras, Addison & C°, 1893. London, Court Company, 1917.

d) H. WIENER. *Herstellung Platoniscer Körper aus Papier - streifen.*

come una semplice «*curiosità matematica*»; altri, con maggiore proprietà, come una «*ricreazione matematica*», senza darle importanza; le nostre enciclopedie delle matematiche elementari o non ne parlano affatto [v. ad esempio «*Questioni riguardanti le matematiche elementari*» di F. ENRIQUES ([1])I] o ne danno soltanto brevi cenni bibliografici [A. AGOSTINI, nell'articolo citato ([1])II,a, si limita a indicare in calce i lavori di I. SUNDARA ROW ([4])c, di U. D'AVISO ([4])a, di E. LUCAS ([4])f] eppure F. KLEIN nelle sue magistrali conferenze sulla geometria elementare ([4])b richiamava l'attenzione sulla piegatura del foglio ricordando i risultati ottenuti da I. SUNDARA ROW ([4])c e da H. WIENER ([4])d.

B. LEVI, in una lettera a G. VAILATI pubblicata nel "Bollettino di Matematica". (Anno 1907 N. 10.11.12, pag. 177), approva l'uso della piegatnra del foglio nell'insegnamento secondario inferiore facendo opportune osservazioni.

2. Diamo qui un cenno di analisi della piegatura come mezzo per la risoluzione dei problemi geometrici:

Si dovrà usare per maggiore precisione fogli sottili, ma sostenuti, di spessore costante, inestensibili.

Una faccia del foglio può essere considerata come una porzione di superficie piana inestensibile che gode delle proprietà:

a) è flessibile rispetto ad una sua retta qualsiasi e le due parti in cui resta divisa possono ruotare attorno alla retta stessa, sovrapponendosi l'una all'altra, nei limiti della loro estensione, conservandosi rigide;

b) se si ripiega il foglio sopra una data superficie piana rigida, premendolo poi completamente sulla superficie stessa, la piega che si ottiene dà, col suo spigolo, sopra una faccia del foglio, un segmento di retta, spigolo col quale possiamo rappresentare la retta.

Si badi, però, che, facendo una piegatura, si ha sempre una deformazione, compressione e stiramento, in una striscia lungo lo

In «Katalog mathematiscer und mathematisch - phisicaliscer Modelle, apparate und instrumenten di W. DYCK». München, 1892. Suppl. s. 52.

e) TH. VALEN. *Konstructionnen und approximationnen in Systematischer Darstellung*. Berlin - Leipzig, Teubner, 1911, s. 59.

f) E. LUCAS. *Récréations mathematiques*. Paris, Gauthier-Vil'ars et fils, Vol. II, pag. 202, 1883.

g) J. SOMMER. *Elementare geometrie vom Ständpunkte der neuren analysis aus*. In «Enciclopädie der mathematischen Wissen-Scaften. Geometrie». Teubner, Leipzig. Bd. III, Helft 5, 1914, s. 771.

h) C. A. RUPP. *On a trasformation by paperfolding*, «Amer. Math. Monthly». Vol. XXXI, pag. 432, 1924.

g) D. HILBERT, *Gründlagen der Geometrie*. Leipzig, Teubner, 1899.

spigolo, striscia che è tanto più piccola quanto è più sottile il foglio e quindi trascurabile.

Per alcune costruzioni sarà opportuno (anzi in alcuni casi necessario) usare carta trasparente e rappresentare i punti matematici con punti grafici, segnati con una matita, ricorrendo alla trasparenza nell'eseguire la piegatura, per avere maggiore esattezza nel sovrapporre punti e rette, per maggiore semplicità di risoluzione.

Osserviamo che la piega può essere ottenuta ripiegando il foglio su una faccia, oppure sull'altra: due pieghe ottenute ripiegando un foglio su una stessa faccia si dicono *concordi*; in caso contrario, *discordi*. Una retta può risultare in parte da una piega, in parte da un'altra discordi fra loro; si ha allora una rappresentazione *mista* che si può ridurre *unica*.

In una piega si hanno quattro facce: sono *interne* le due che vengono a combaciare quando si eseguisce la piegatura; *esterne*, le altre due.

Ripiegando il foglio in modo che una sua piega venga a sovrapporsi a un'altra, spigolo su spigolo, si possono avere tre specie di sovrapposizioni: *concorde*, quando le facce esterne di una piega vengono a contatto con le facce interne dell'altra; *discorde*, quando le facce interne di una piega vengono a contatto con le facce interne dell'altra; *esterne*, quando una faccia esterna di una piega viene a contatto con una faccia esterna dell'altra. Volendo, nelle costruzioni si possono usare tutte pieghe concordi.

Un punto si può rappresentare con gli spigoli di due pieghe passanti per esso; due spigoli di pieghe che non s'incontrano nel foglio rappresentano un punto che cade fuori del foglio; una retta che cade fuori del foglio si può rappresentare con due suoi punti.

Una circonferenza può essere rappresentata dal suo centro e da un suo punto: centro e circonferenza possono cadere fuori del foglio. In generale le curve si rappresentano col minor numero possibile di elementi (punti e rette) necessari per determinarle.

Si può osservare che il solo elemento *costruttore* è la retta, quando si ricorre al metodo puro della piegatura, cioè senza punti grafici segnati con la matita.

Non avendo carta trasparente, per avere maggiore esattezza nella sovrapposizione, si potrà indicare un punto con un foro fatto con uno spillo e ricorrere ad una tavoletta piana di legno per fare la sovrapposizione di due punti, ricorrendo allo spillo, e quindi premere il foglio per ottenere la piega.

Nella risoluzione dei problemi, elementi dati e da trovarsi devono essere sempre rappresentati o rappresentabili con pieghe e punti grafici (si riducono *effettivamente* a punti e rette), in numero finito e in numero finito sono le operazioni da eseguire per passare dagli uni elementi agli altri.

3. Cominciamo col considerare un primo gruppo di piegature, che preferiamo tenere distinte: la piegatura α fatta per rappresentare una retta generica; la piegatura β fatta per rapprentare una retta passante per un punto grafico dato del foglio; la piegatura γ fatta per rappresentare una retta passante per due punti grafici dati del foglio.

Naturalmente è necessario avere a disposizione una superficie piana rigida sulla quale eseguire le piegature indicate e le altre che si considerano poi.

Le tre piegature sostituiscono completamente la riga comune, supposto che i dati si possano individuare con queste sole piegature; con l'uso di esse si possono risolvere i problemi grafici di primo grado e questi soltanto, tanto se i dati cadono nel foglio quanto fuori di esso.

Se fra i dati ci fosse, ad esempio, un segmento del quale siano segnati gli estremi e il punto di mezzo, si può tracciare per un punto qualunque la parallela al segmento dato, e, preso su questa un segmento qualunque, determinare su essa un altro segmento che stia al secondo nel rapporto razionale $p/_q$.

4. Consideriamo, con le tre precedenti, la piegatura δ fatta sopra un foglio ripiegato: ridistendendolo si hanno due figure eguali in simmetria ortogonale rispetto allo spigolo della prima piega fatta.

Con le quattro piegature fin qui considerate si possono risolvere anche i problemi metrici di primo grado pei quali sono sufficienti la riga comune e un rettangolo dato sul foglio, e soltanto quelli, supposto che i dati si possano ottenere con queste sole piegature. I dati possono anche cadere fuori del foglio.

Se, ad esempio, fra i dati figurassero due segmenti eguali e perpendicolari fra loro, si potrebbero risolvere con le quattro piegature tutti i problemi grafici e metrici di primo grado.

Se è dato un segmento del quale siano segnati gli estremi e il punto di mezzo e un trapezio rettangolo con le basi non parallele al segmento, si possono risolvere con le prime tre piegature tutti i problemi che si possono risolvere con le prime quattro, con la condizione supposta.

Consideriamo la piegatura ε ottenuta sovrapponendo due punti del foglio sopra una superficie piana rigida, premendo poi completamente il foglio sulla superficie stessa: il gruppo di piegature $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ è equivalente al gruppo $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$.

Con uno dei due gruppi indicati, si può far subire ad una figura data: una traslazione rappresentata in grandezza, direzione, senso da un dato segmento orientato; un ribaltamento. Raddoppiare, triplicare, ecc., un angolo dato.

La piegatura ε si può chiamare la *piegatura bisettrice di segmenti*. Si può considerare anche la piegatura ε' che si ottiene dato un segmento AB, tenendo fisso B e facendo cadere A sulla retta a cui appartiene AB in un punto C. Il segmento AC risulta doppio di AB e la piegatura si può chiamare la *piegatura duplicatrice di segmenti*.

Il gruppo di piegature α, β, γ, ε' è pure equivalente al gruppo di piegature α, β, γ, δ.

Le piegature ε, ε' si ottengono meglio e più semplicemente ricorrendo alla carta trasparente e ai punti grafici: in questo caso la sovrapposizione e la piegatura si fanno per trasparenza, contro luce, sopra un vetro incolore trasparente a facce piane parallele, di piccolo spessore, fisso, come può essere un vetro comune di una finestra.

5. Consideriamo, con le prime tre, la piegatura ξ, fatta sovrapponendo due rette che si tagliano nel foglio: la piega che si ottiene ci dà col suo spigolo la bisettrice di uno degli angoli completi formati dalle due rette; se le due rette coincidono in una, si ottiene la perpendicolare a questa nel punto di essa che si sovrappone su se stesso.

La piegatura si può chiamare *piegatura bisettrice di angoli*; con essa si può far subire ad una figura data una rotazione attorno ad un punto, dato l'angolo di rotazione e il verso.

Con le prime tre piegature e con questa si può ottenere un quadrato e quindi risolvere tutti i problemi di primo grado; inoltre si può *trasportare* sopra una retta data, a partire da un suo punto in un senso o nell'altro un segmento qualsiasi dato nel foglio, cioè si possono risolvere tutti i problemi risolubili con la riga e il trasportatore di segmenti, cadano i dati nel foglio o fuori, e soltanto questi, supposto che i dati si possano costruire con le sole quattro piegature indicate.

Alcuni affermano che coi problemi risolubili con la riga e il trasportatore di segmenti si esauriscono le *possibitità costruttivi* della piegatura del foglio. Ciò è vero se si considerano soltanto le piegature indicate od altre equivalenti, non è vero se si tien conto delle piegature seguenti.

6. Con le piegature α, β, γ, ξ, consideriamo la piegatura η che ci consenta di *inserire* un segmento AB di retta fra il punto A

e una retta data. Naturalmente per la possibilità del problema è necessario che il segmento dato non sia minore della distanza del punto A dalla retta e che l'ampiezza del foglio consenta l'operazione.

Sia a la retta data: ripieghiamo il foglio con una piega passante per A in modo che B venga a cadere in un punto C della retta a che indichiamo o con un punto grafico o con uno spigolo passante per C, di una piega. Il segmento AC risolve il problema.

Se AB è eguale alla distanza di A da a, basta da A tracciare la perpendicolare ad a; se AB è maggiore della distanza di A da a, per trovare la seconda soluzione del problema basta procedere come si è fatto prima, ma dalla banda opposta della perpendicolare condotta da A ad a.

Ricorrendo alla carta trasparente e alla matita per meglio eseguire la sovrapposizione, e procedendo come si è indicato, la costruzione riesce più esatta.

Con le piegature considerate in questo numero si possono risolvere tutti i problemi risolubili con la riga e il compasso: intersezioni di una retta e di una circonferenza, intersezioni di due circonferenze, ecc., cioè tutti i problemi di primo e secondo grado, e soltanto questi, se i dati si possono costruire con le sole piegature indicate.

I dati possono cadere anche fuori del foglio.

Con la piegatura η si può sopprimere la γ che alcuni dicono causa di inesattezze, ma non è conveniente. Per far ciò, dovendo unire il punto A col punto B, basta sovrapporre A a B e premere il foglio su una superficie piana rigida, ottenendo una retta a, poi ridistenderlo, prendere su a un punto qualunque C, piegare nuovamente il foglio in modo che A resti fisso e C venga a cadere su a in un punto D, ridistendere il foglio, sovrapporre il punto C a D e premere il foglio sulla superficie piana rigida: si ottiene così la retta passante per A e B.

7. L'ultimo tipo di piegatura ϑ che consideriamo è quello usato dalla Prof. M. PIAZZOLLA BELOCH ([2]), piegatura che ha lo scopo di *inserire*, quando sia possibile, un segmento di retta AA', dato sul foglio in grandezza e posizione, fra due rette a, a' (A non appartenente ad a, B non appartenente a b) in modo che A cada su a e B su b. Le due posizioni iniziali e finali del segmento AB risultano in simmetria ortogonale rispetto allo spigolo della piega ottenuta.

Per avere tutte le soluzioni con chiarezza e precisione è necessario ricorrere al foglio trasparente e alla matita.

Con la piegatura ϑ si considerano le α, β, γ. ξ, η.

Ci limitiamo ad esporre, per la sua semplicità, la risoluzione della Prof. M. Piazzolla Beloch (2) del problema della ricerca di una tangente reale propria comune a due parabole date nel foglio mediante i loro fuochi e le loro direttrici.

Siano date le parabole rispettivamente di fuoco A e direttrice d_a di fuoco B e direttrice d_b: basta ripiegare il foglio in modo che d_a e d_b vengano rispettivamente a passare per A e B. Lo spigolo della piega ottenuta dà, per una proprietà nota, una tangente comune alle due parabole: il problema può avere una, due o tre soluzioni *distinte* reali, o nessuna.

La Prof. M. Piazzolla Beloch risolve con questa piegatura, fra altri. il problema delle due medie proporzionali (2)$_b$; si può inoltre risolvere il problema della trisezione dell'angolo, ne viene quindi che con tutte le piegature sopra indicate si possono risolvere tutti i problemi di 3° grado, quando gli elementi noti sono dati da spigoli di pieghe e punti grafici e quindi gli elementi richiesti sono rappresentabili allo stesso modo.

Non semplici e pratiche riescono tutte le risoluzioni: oltre quelle sopra indicate della Prof. M. Piazzolla Beloch, è semplice, fra altre, la sua risoluzione del problema della duplicazione del cubo (2)$_b$ che ricorda la prima di Menecmo (4)$_{I,f}$; molto meno semplice la trisezione dell' angolo, altre riescono troppo complicate.

Non crediamo si possano fare riserve sui risultati notevoli che si possono ottenere con la piegatura ϑ. Si può solo obiettare che, se gli estremi dei segmenti simmetrici del dato cadono fuori del foglio, la risoluzione è in difetto: osservazione che non ha valore, perchè basta prendere, ad esempio, in tal caso, un foglio più grande, alle volte può bastare uno spostamente della figura nel foglio stesso.

8. Si è fin qui supposto che i dati fossero rappresentati da spigoli di pieghe e da punti grafici. Se fossero espressi analiticamente, valgono le osservazioni seguenti:

a) Se si considera una retta del foglio e si prende su essa un punto O come origine e il punto A come punto 1, con le piegature α, β, γ, ξ, η, ϑ si possono costruire tutti i punti le cui ascisse appartengono al campo di razionalità [1] aggiungendo le radici quadrate di ogni numero positivo in esso contenuto e le radici cùbiche reali di ogni numero in esso contenuto e le quantità reali che si ottengono da queste applicando un numero indeterminato ma finito di volte, anche comulativamente, le operazioni razionali e le estrazioni di radice quadrata e cubica. Basta ricorrere alle costruzioni del segmento medio proporzionale fra due segmenti dati e dello spigolo del cubo doppio, triplo, ecc. di un cubo di cui si conosce lo spigolo, ecc.

Se fossero *dati* sulla retta *altri* punti di ascisse $a, b, \ldots$ non compresi quindi nel secondo campo in luogo del campo [1] si dovrebbe prendere il campo $[1, a, b, \ldots]$ con l'aggiunta sopra indicata $(^1)_{I,c}$.

b) Se si considerano due assi cartesiani X, Y (usando per semplicità tale rappresentazione e prendendo la stessa unità sui due assi) di origine O, essendo A il punto $(1, 0)$, con le piegature indicate si possono segnare i punti le cui ascisse e le cui ordinate appartengono al campo formato dal campo di razionalità [1] completato nel modo indicato nella osservazione *a*). Se fossero *dati* sul foglio *altri* punti in numero finito $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots$ di ascisse e di ordinate non comprese quindi nel campo prima indicato, in luogo del campo [1] si dovrebbe prendere il campo $[1, a_1, a_2, \ldots b_1, b_2 \ldots]$ con l'aggiunta sopra indicata.

c) Ne viene che per la risoluzione di un problema avente i dati espressi con coordinate del tipo indicato sopra, i dati stessi si potranno rappresentare con le considerate piegature e si potranno trovare gli elementi incogniti esprimibili con le piegature stesse.

d) Se il problema da risolvere di 1°, 2,° 3° grado si traduce in equazioni di 1°, 2°, 3°, queste si potranno risolvere con la piegatura se i loro coefficienti si possono esprimere come è indicato nella osservazione *a*).

Poichè i problemi di 4° grado si possono ridurre alla risoluzione di equazioni di 4° grado e la risoluzione di queste dipende dalla risoluzione di equazioni di grado minore, ne viene che essi si potranno risolvere purchè tali equazioni siano del tipo sopra indicato.

9. Si allarga così il campo di risolubilità del metodo della piegatura del foglio contrariamente alla convinzione di alcuni studiosi, fra i quali lo stesso I. SUNDARA ROW $(^4)_c$ il quale affermava (v. lavoro citato, N. 112) che il problema delle due medie proporzionali non è risolubile con tale metodo.

E il metodo si può applicare alla risoluzione di problemi su superficie sviluppabili in un piano.

Si può osservare che ricorrendo alle sole piegature (oltre le considerate se ne possono usare altre), senza l'uso di curve disegnate a tratto continuo sul foglio, si deve necessariamente ricorrere meccanicamente ad opportune *inserzioni* di segmenti di rette, mentre i Greci, forse perchè non soddisfatti di tali metodi, li abbandonarono per usarne altri più eleganti con l'uso di apposite curve a tratto continuo, tracciate con appositi strumenti: ma ciò, per la questione che trattiamo, ha poca importanza.

Certo se nel foglio fossero disegnate a tratto continuo particolari curve, o si potessero usare particolari strumenti, si otterrebbero semplificazioni e costruzioni più eleganti. Ad esempio, se si avesse nel foglio una conchiglia di PASCAL a tratto continuo, si potrebbe facilmente trisecare un angolo dato.

Alcune volte, però, usando la piegatura col sussidio di particolari strumenti o curve, la sua funzione si riduce soltanto a darci rette rappresentate da spigoli di pieghe, anzichè con un tratto continuo tracciato con la matita, usando la riga.

La piegatura si presta anche per la ricerca di quanti si vogliano elementi, punti e rette di particolari curve ([4])$_b$.

Si deve riconoscere che in alcuni casi i risultati ottenuti con la sola piegatura sono più rapidi ed eleganti di quelli ottenuti in altro modo: basta ricordare la costruzione delle tangenti proprie comuni a due parabole. In altri casi non hanno che valore teorico.

Alcuni pensano che i risultati siano meno esatti che con altri metodi, ciò che in molti casi non è affatto vero. Del resto l'appunto che nella risoluzione dei problemi geometrici non ci sia esattezza si può fare per qualsiasi metodo pratico: ricordiamo il biasimo di PLATONE a chi risolveva problemi con mezzi meccanici.

Come valutare la minore esattezza usando la piegatura? e come valutare la semplicità? Ad esempio, usando la riga e il compasso, la linea più semplice, dopo la retta, è la circonferenza; usando la piegatura, la linea più semplice, dopo la retta, è la parabola come inviluppo delle sue tangenti.

Del resto anche le nostre costruzioni mentali non sono perfette: l'esattezza dipende dalla nostra intuizione: ma l'intuizione si perfeziona appunto con l'osservazione dei modelli fisici, con la loro costruzione.

I vari metodi di risoluzione dei problemi hanno quindi un loro valore teorico, un valore pratico, di più servono a sviluppare, a migliorare la nostra intuizione. Ci sembra che le risoluzioni con la piegatura del foglio facciano più delle altre operare la mano e l'occhio, quindi forse meglio contribuiscano alla formazione dei nostri concetti geometrici.

Come dicevamo all'inizio, nei vecchi Corsi di Lavoro Manuale che si tenevano a Ripatransone molto si usava, molto si consigliava la piegatura per l'insegmento elementare; già prima FEDERICO FROEBEL la consigliava nell'insegnamento dei bimbi, perchè non si potrebbe utilizzare il metodo stesso anche nelle scuole secondarie e superiori, sempre, intendiamoci, con giusta misura?