Bollettino
Unione Matematica Italiana

Amedeo Agostini

L'uso delle lettere nel "Liber abaci" di Leonardo Fibonacci

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 282–287.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_282_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

L'uso delle lettere nel "Liber abaci" di Leonardo Fibonacci.

Nota di AMEDEO AGOSTINI (a Livorno).

Sunto. - *Si portano esempi, tratti dal* Liber abaci *di* FIBONACCI, *per mostrare come fino dal principio del XIII secolo si incominci a usare lettere per trattare in generale questioni matematiche.*

È opinione diffusa che l'uso delle lettere e il calcolo letterale fu introdotto da FRANCESCO VIETA (1540-1603).

È vero che frequentemente VIETA usa lettere dell'alfabeto per indicare un numero qualsiasi o un'incognita; occorre però notare che al matematico francese mancano gran parte delle notazioni e simboli attualmente in uso per indicare le varie operazioni, così che, leggendo le sue opere, siamo ben lontani dal riscontrare in esse ciò che ora intendiamo per calcolo letterale, perchè in gran parte le operazioni tra lettere vengono indicate in forma discorsiva, sia pure spesso in modo abbreviato.

Non mancano esempi anteriori a VIETA di uso di lettere nella trattazione generale di problemi o questioni teoriche, però non è stato ancora segnalato l'abbondante uso di lettere per indicare numeri generici fatto da LEONARDO FIBONACCI nel suo *Liber Abaci* composto nel 1202 e rielaborato nel 1228.

MORITZ CANTOR nel II° volume delle sue *Vorlesungen* (1), esaminando l'importante opera medievale del grande matematico pisano, cita soltanto tre esempi di uso di lettere, mentre essi sono assai più numerosi.

(1) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Lipsia, vol. II, p. 17, 31, 33.

Non mi soffermo a citare i molti passi nei quali FIBONACCI, seguendo in ciò EUCLIDE, dà dimostrazioni e regole generali rappresentando i numeri con segmenti, come pure non farò parola delle questioni trattate in modo misto, cioè di quelle nelle quali i numeri generici sono rappresentati in parte da segmenti, in parte da lettere.

Riferirò dunque solo quelle questioni nelle quali FIBONACCI fa solo uso di lettere, mostrando, nel modo più breve possibile, come opera sopra di esse.

***

Il primo uso di lettere si ha a pag. 132 [1]. Dopo avere risolto il problema numerico: "5 cavalli mangiano 6 staia di orzo in 9 giorni, si chiede in quanti giorni, con la stessa razione, 10 cavalli mangiano 16 staia di orzo", FIBONACCI si propone di mostrare che, dati 6 numeri tali che il prodotto di tre di essi sia uguale al prodotto degli altri tre, si possono formare con essi "19 combinationum proportionum".

Ecco come introduce i numeri: *Sit itaque numerus* . e . *linea prima, et* . f . *sit secunda, et* . d . *sit tertia, et* . a . *sit quarta, et* . b . *quinta, numerus quoque* . c . *sit linea sexta; et sit numerus* . a . e . c . *quedam coniunctio* (prodotto), *que vocetur prima: numeri vero* . d . b . f . *sit coniunctio secunda.*

È vero che in questo passo ogni numero è chiamato *linea*, ma nel seguito FIBONACCI opera sulle lettere senza ricorrere alla rappresentazione geometrica, come quando eseguisce i prodotti aec e bdf nel passo riferito.

***

A p. 360 si trova la dimostrazione della proprietà $\sqrt{m}\,\sqrt{n} = \sqrt{mn}$.

Dopo aver dato la regola pratica per eseguire il prodotto di $\sqrt{10}$ per $\sqrt{20}$, così dimostra la proprietà in generale: Sia a la $\sqrt{10}$ e b la $\sqrt{20}$ e sia anche $a = g$ e $b = d$, allora facendo il prodotto ag, cioè a per se stesso, si ottiene 10, così moltiplicando b per d, cioè b per se stesso, si ottiene 20; quindi per moltiplicare 10 per 20, moltiplico il prodotto ag per il prodotto db, perciò il prodotto di ag per bd è 200. Ma il prodotto $agbd$ è uguale al prodotto di ab per dg, che vale anch'esso 200, e inoltre il prodotto ab è uguale al prodotto dg, quindi il prodotto di ab per dg è uguale al prodotto di ab per sè stesso; dunque anche il prodotto di ab per se stesso fa 200. Perciò il prodotto di a per b, cioè di $\sqrt{10}$ per $\sqrt{20}$, è la $\sqrt{200}$, ciò che occorreva dimostrare.

[1] L. FIBONACCI, *Liber Abbaci*, pubblicato da B. Boncompagni, Roma 1857.

Dunque FIBONACCI dimostra, come si fa anche ora, che

$$(\sqrt{m}\ \sqrt{n})^2 = (\sqrt{mn})^2.$$

* * *

Le proprietà delle proporzioni sono enunciate in generale a p. 395, cui fanno seguito la risoluzione di problemi generali sopra le proporzioni.

Cum quattuor numeri . a . b . g . d . *proportionales fuerint ut* . a. *ad* . b ., *ita* . g . *ad* . d ., *erit permutatim sicut* . b. *ad* . a., *ita* . d. *ad* . g .; *et sicut* . g . *ad* . a . *ita* . d . *ad* . b .; *et multiplicatio* . a . *in* . d . *equatur multiplicationi* . b . *in* . g .

Enunciate queste proprietà, FIBONACCI determina, sempre usando lettere, uno dei quattro numeri, noti gli altri tre, due dei numeri nota la loro somma e gli altri due. Così pure risolve il problema più complesso: di quattro numeri a, b, c, d proporzionali, sia nota la somma dei quadrati dei primi due numeri e, conoscendo gli altri due numeri, determinare i primi due (p. 396).

* * *

La risoluzione di un problema numerico eseguita con l'aiuto delle lettere si trova a p. 396.

Il problema è: "Un tale aveva 100 lire con le quali in un mercato guadagnò una certa somma, col nuovo capitale in un altro mercato guadagnò proporzionalmente al guadagno fatto nel primo mercato e si trovò in fine 200 lire „.

Ed ecco la soluzione: *Pone* . a . *pro libris* 100 *et* . b . *pro eo, quod habuit inter capitale et lucrum in primo foro; et* . g . *sit* 200; *quia est sicut* . a . *ad* . b . *ita* . b . *ad* . g ., *erit multiplicatio* . a . *in* . g . *equalis quadrato numero* . b .; dopo ciò esegue le operazioni indicate sui numeri dati.

* * *

Il problema: Divisi 10 in due parti e divisi quella per questa e questa per quella e ne risultarono $\frac{10}{3}$ (p. 410), indicando con x una delle parti, dà luogo alla equazione

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \frac{10}{3},$$

nella quale occorre eliminare i denominatori x e $10-x$.

FIBONACCI giustifica questa operazione, che poi esegue in altri problemi, con il seguente ragionamento:

In hac questi ne opportet quedam predicere et demostrationibus demonstrare: sit itaque prima illarum partium . a . *et secunda* . b ., *et dividatur* .b. *in* .a. *et proveniat* .d.; *et* .a. *in* .b. *et proveniat* .g.; *coniunctum ergo ex* .g.d. *est* $\frac{1}{3}3$; *et quia cum dividitur* .a. *in* .b. *provenitur* (g) *ergo si moltiplicatur* .g. *in* .b. *provenit* .a.; *quod si moltiplicetur in* .a. *venit quadratus numeri* .a.; *et cum dividetur* .b. *in* .a. *provenit* .d., *ergo si multiplicetur* .d. *in* .a. *provenit* .b.; *quod si multiplicetur in* .b., *provenit quadratus numeri* .b.; *ergo ex* .a. *in* .d. *ducta in* .b. *et ex* .b. *in* .g. *ducta in* .a. (cioè, adb + bdg), *hoc est ex* .a. *in* .b. *ductum in coniuntum ex numeris* .g.d., *silicet in* $\frac{1}{3}3$ (cioè. $ab(g + d) = \frac{10}{3} ab$) *provenit summa quadratorum ex numeris* .a.b. (cioè, $a^2 + b^2 = \frac{10}{3} ab$).

Dunque trasforma l'equazione nell'equazione equivalente

$$x^2 + (10 - x)^2 = \frac{10}{3} x(10 - x).$$

***

Vediamo ora un esempio di risoluzione di un problema ove le operazioni eseguite sopra l'equazione sono trasformate in operazioni tra numeri indicate da lettere.

Fibonacci prende in esame il problema:

Divisi 10 in due parti e divisi questa per quella e quella per questa e ciò che ne risultò lo moltiplicai per una delle parti e ottenni 34 (p. 419).

Indicando con x una delle parti, il problema si traduce nella equazione

$$\left(\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x}\right)x = 34,$$

e l'equazione viene trasformata nella seguente maniera:

Sit maior pars .a. *et minor sit* .b.; *et dividatur* .a. *per* .b. *et veniet* .d.; *et* .b. *per* .a. *et veniet* .g.: *multiplicavi ergo coniunctnm ex* .g.d. *in* .a. *et provenit* 34: *pone ergo* .a. *rem, remanebit* .b. 10 *minus re: et multiplicatur* .g. *per* .a. *et veniet* .b. (cioè, $\frac{b}{a}a = b$), *silicet* 10 *minus re; que extrahatur de* 34, *remanent* 24, *addita re, pro multiplicatione numeri* .d. *in* .a. (cioè, $\frac{x}{10 - x}x = 24 + x$); *que multiplicatio equatur divisioni quadrati ex numero* .a. *in* .b. (cioè, $\frac{x^2}{10 - x} = 24 + x$); *quare si multiplicetur* .b. *silicet* 10 *minus re, per* 24, *re addita* (cioè, $x^2 = (24 + x)(10 - x)$), *venient omnia, que dicta sunt in antecedente questione.*

Procedimento analogo è seguito per risolvere il problema (p. 420): Divisi 10 in due parti e divisi una parte per l' altra e ciò che ne risultò lo moltiplicai per la parte divisa e furono 9, cioè per risolvere l' equazione

$$\frac{x^2}{10 - x} = 9.$$

***

Interessanti sono le dimostrazioni di alcune identità e relazioni tra numeri che FIBONACCI dimostra in generale per poi applicarle alla risoluzione delle equazioni. Alcune sono dimostrate con procedimento euclideo rappresentando i numeri con segmenti, altre col metodo che ho chiamato misto, altre invece rappresentando i i numeri soltanto con lettere e operando su esse. Naturalmente accennerò soltanto a queste ultime.

A p. 432 troviamo dimostrata la proprietà: *Sint tres quantitates* . a . b . c . *continue proportionales in ea quam habet quantitas* . d . *ad quantitatem* . e .; *et sit* . d . *minor quam* . e .; *et sit sicut* . d . *ad* . e ., *ita* . a . *ad* . b ., *et* . b . *ad* . c .: *dico, quod factum ex* . d . *in quantitates* . b . c . *est sicut factum ex* . e . *in quantitates* . a . b .

Cioè se è

$$d:e = a:b = b:c, \qquad \text{con} \qquad d < e,$$

si ha anche

$$d:e = (a + b):(b + c)$$

ossia, come l' enuncia l' autore,

$$d(b + c) = e(a + b).$$

***

A p. 455 è dimostrata l' identità

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{a}{a - x} = \frac{a}{x} + \frac{a}{a - x},$$

che viene enunciata nei seguenti termini: *Dividatur aliquis numerus* . a . *in duas partes* . b . g .; *et dividatur* . a . *per* . b . *et veniet* . e .; *et* . a . *per* . g ., *veniet* . d .: *dico quod multiplicatio* . d . *in* . e . *est sicut aggregatio* . d . *cum* . e .

Sempre nella stessa pagina è dimostrata anche l'identità: se è $a = b + c$, risulta

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{c}{b}.$$

Nella pagina 456 dimostra che, se $a = c + d$, si hanno le relazioni

$$a:b = \left(\frac{a}{c} + \frac{a}{d}\right):\left(\frac{b}{c} + \frac{b}{d}\right)$$

$$cd\left(\frac{b}{c} + \frac{b}{d}\right) = ab\,,$$

delle quali la prima è vera sempre, anche senza la condizione $a = c + d$ imposta da FIBONACCI nell'enunciato della relazione e usata durante la dimostrazione.

Le due relazioni, che abbiamo scritto con notazioni moderne, sono così enunciate da FIBONACCI:

Sint duo numeri . a . b .; *et dividatur* . a . *in duas partes, que sint* . c . d .; *et dividatur* . a . *per* . c ., *veniet* . e .; *et dividatur* . a . *per* . d ., *veniet* . f .. *et dividatur* . b . *per* . c .. *veniat* . g .; *et dividatur* . b . *per* . d ., *veniat* . h .: *dico quod est sicut* . a . *ad* . b . *ita* . e . f . *ad numeros* . g . h . ..... *Dico, quod multiplicatio* . c . [1] *in* . d . *producta in summa numerum* . g . h . *est sicut multiplicatio* . a . *in* . b .

Sempre conservando le stesse iudicazioni date sopra, FIBONACCI dimostra ancora un'altra identità:

Et multiplicatur . c . *in* . d . *et veniat* . k .; *ex* . g . *in* . h . *veniat* . l .: *dico quod multiplicatio* . k . *in* . l . *est sicut multiplicatio* . b . *in se,*

cioè che
$$cd \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{d} = b^2.$$

***

Gli esempi riferiti permettono di affermare che FIBONACCI ha fatto uso frequente delle lettere per indicare numeri positivi generici e ciò per avere regole generali di calcolo o di semplificazioni da applicare specialmente alla risoluzione delle equazioni. La mancanza di simboli per indicare le operazioni aritmetiche lo obbligano a introdurre nuove lettere, in particolare per indicare il quoziente tra due numeri. È forse questa introduzione di un numero di lettere più del necessario che ha spinto i nostri aritmetici medievali a non continuare sulla via tracciata da FIBONACCI per determinare regole generali di calcolo mediante l'uso di lettere. E fu un peccato, perchè questa via, anche senza i simboli che ora possediamo, avrebbe facilitato il compito dei nostri algebristi del Cinquecento.

[1] Il testo presenta due errori di trascrizione: « dicto » per « dico » e invece del numero c è scritto g.