BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE VAROLI

Identità numeriche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.3, p. 250–254.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_3_250_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Identità numeriche.

Nota di Giuseppe Varoli (a Bologna).

Sunto. - *Si stabiliscono identità numeriche partendo dalla conoscenza di funzioni inverse di funzioni ordinatrici di funzioni date.*

1. F. Sibirani in una memoria *Sulle funzioni ordinatrici* (1) dimostra come si possa determinare l'espressione analitica delle funzioni ordinatrici di alcuni tipi di funzioni; intendendo per *funzione ordinatrice* non decrescente (non crescente) di una funzione $f(x)$, definita in $a \vdash\!\dashv b$ ed ivi continua, la funzione $\varphi(x)$ non decrescente (non crescente) nel suddetto intervallo, soddisfacente alla condizione che la misura dell'insieme dei punti di $a \vdash\!\dashv b$ in cui è

$$\alpha \leq \varphi(x) \leq \beta$$

(1) Cfr. A. N. Lowan, N. Davids, A. Levenson, *Table of the zeros of Legendre Polynomials of order* 1 — 16 *and the weight coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature formula*, « Bull. of the Amer. Math. Society », 48, 1942, pp. 738-743.

(1) « Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna ». Serie X, Tomo V, 1947-48. Classe di Scienze Fisiche, Sezione delle Scienze Fisiche e Matematiche.

eguagli la misura dell'insieme dei punti in cui è

$$\alpha \leq f(x) \leq \beta,$$

qualunque sia la coppia di numeri α, β.

La conoscenza di funzioni ordinatrici o di funzioni inverse di funzioni ordinatrici di funzioni date permette di ottenere identità numeriche.

2. Consideriamo la funzione

(1) $$y = (2p\sqrt[2n]{x} - \sqrt[n]{x})^m \qquad (m, n \text{ interi positivi})$$

nell'intervallo

$$(p-q)^{2n} \mathbin{|\!-} (p+q)^{2n}. \qquad (p > q)$$

Poichè la (1) assume negli estremi dell'intervallo il valore $(p^2 - q^2)^m$ e nel suddetto intervallo ha l'unico massimo $y = p^{2m}$ per $x = p^{2n}$. risulta, seguendo F. Sibirani, che l'espressione analitica della funzione inversa della sua funzione ordinatrice non crescente è

$$x = (p-q)^{2n} + 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}p^{2(n-k)-1}(p^2 - \sqrt[m]{y})^{k+1/2}.$$

I due integrali

$$\int_{(p-q)^{2n}}^{(p+q)^{2n}}[(2p\sqrt[2n]{x} - \sqrt[n]{x})^m - (p^2-q^2)^m]dx = 2n\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\binom{m}{k}(2p)^{m-k}}{2n+m+k}$$
$$[(p+q)^{2n+m+k} - (p-q)^{2n+m+k}] - (p^2-q^2)^m[(p+q)^{2n} - (p-q)^{2n}];$$

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}p^{2(n-k)-1}\int_{(p^2-q^2)^m}^{p^{2m}}(p^2 - \sqrt[m]{y})^{k+1/2}dy =$$

$$= 4m\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\frac{\binom{m-1}{s}p^{2(m+n-k-s)-3}q^{2(k+s)+3}}{2(k+s)+3},$$

rappresentando l'area di una stessa porzione di piano, sono uguali; ne deriva l'identità

(2) $$2n(2p)^m\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{(p+q)^{2n+m+k} - (p-q)^{2n+m+k}}{(2p)^k(2n+m+k)} -$$
$$- (p^2-q^2)^m[(p+q)^{2n} - (p-q)^{2n}] =$$
$$= 4mp^{2(m+n)}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\frac{\binom{m-1}{s}}{2(k+s)+3}\left(\frac{q}{p}\right)^{2(k+s)+3}$$

Per $p = q$ la (2) diventa

$$n \cdot 2^{2(m+n)-1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{\binom{m}{k}}{2n + m + k} = m \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \frac{\binom{m-1}{s}}{2(k+s)+3}.$$

3. Poniamo nella (1) $m = \frac{1}{2}$, risulta la funzione

$$y = \sqrt{2p \sqrt[2n]{x} - \sqrt[n]{x}}. \tag{3}$$

La funzione inversa della funzione ordinatrice non crescente della (3) è

$$x = (p-q)^{2n} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2(n-k)-1} (p^2 - y^2)^{k+1/2}.$$

I due integrali

$$\int_{(p-q)^{2n}}^{(p+q)^{2n}} \left(\sqrt{2p \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x}} - \sqrt{p^2 - q^2}\right) dx =$$

$$\begin{aligned}
(4) = {} & \frac{2n(2p)^{2n+1}}{2n+1} \prod_{h=0}^{2n-1} \frac{2(2n-h)-1}{2(2n-h)} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{p+q}{p-q}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{p-q}{p+q}}\right) + \\
& + \frac{2n(2p)^{2n+1}\sqrt{p^2 - q^2}}{2n+1} \left[\frac{(p+q)^{2n} - (p-q)^{2n}}{(2p)^{2n+1}} + \frac{(p-q)^{2n-1} - (p+q)^{2n-1}}{2 \cdot 2n(2p)^{2n}} + \right. \\
& \left. + \sum_{s=1}^{2(n-1)} \frac{(p-q)^{2n-s-1} - (p+q)^{2n-s-1}}{2(2n-s)(2p)^{2n-s}} \prod_{h=1}^{s} \frac{2(2n-h+1)-1}{2(2n-h+1)}\right] - \\
& - \sqrt{p^2 - q^2}\,[(p+q)^{2n} - (p-q)^{2n}];
\end{aligned}$$

$$2 \sum_{=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} p^{2(n-k)-1} \int_{\sqrt{p^2-q^2}}^{p} (p^2 - y^2)^{k+1/2} dy = 2p^{2n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad & \left[\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{p}\right) \prod_{h=0}^{k} \frac{2(k-h)+1}{2(k-h)+2} - \frac{q^{2k+1}\sqrt{p^2 - q^2}}{2(k+1)p^{2(k+1)}}\right] - \\
& - 2p^{2n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{q^{2(k-s)-1}\sqrt{p^2 - q^2}}{2(k-s)p^{2(k-s)}} \prod_{m=0}^{s} \frac{2(k-m)+1}{2(k-m)+2},
\end{aligned}$$

rappresentando l'area di una stessa porzione di piano, sono uguali; quindi; tenendo conto che

$$\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{p+q}{p-q}} - \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{p-q}{p+q}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} \frac{\sqrt{p^2 - q^2}}{p}, \tag{6}$$

si deducono le due identità:

$$\frac{2n}{2n+1}\prod_{h=0}^{2n-1}\frac{2(2n-h)-1}{2n-h}=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\prod_{h=0}^{k}\frac{2(k-h)+1}{2(k-h)+2};$$

$$\frac{1}{2n+1}\Big[(p+q)^{2n-1}(2p+q)-(p-q)^{2n-1}(2p-q)+$$

$$(7)\qquad +2np\sum_{s=1}^{2(n-1)}(2p)^s\frac{(p+q)^{2n-s-1}-(p-q)^{2n-s-1}}{2n-s}\prod_{h=1}^{s}\frac{2(2n-h+1)-1}{2(2n-h+1)}\Big]=$$

$$=p^{2n+1}\Big\{\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\Big[\frac{q^{2k+1}}{(k+1)p^{2(k+1)}}+\sum_{s=0}^{k-1}\frac{q^{2(k-s)-1}}{(k-s)p^{2(k-s)}}\prod_{m=0}^{s}\frac{2(k-m)+1}{2(k-m)+2}\Big]+\frac{2nq}{p^2}\Big\}.$$

Per $p=q$ la (7) diventa

$$\frac{2^{2n-1}}{2n+1}\Big[3+2n\sum_{s=1}^{2(n-1)}\frac{1}{2n-s}\prod_{h=1}^{s}\frac{2(2n-h+1)-1}{2(2n-h+1)}\Big]=$$

$$=2n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\Big[\frac{1}{k+1}+\sum_{s=0}^{k-1}\frac{1}{k-s}\prod_{m=0}^{s}\frac{2(k-m)+1}{2(k-m)+2}\Big].$$

4. L'integrale (5) è stato calcolato mediante la sostituzione $y=p\operatorname{sen}t$; calcolandolo mediante la sostituzione $y=p\frac{t^2-1}{t^2+1}$, si ottiene

$$(8)\qquad 2\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}p^{2(n-k)-1}\int_{\sqrt{p^2-q^2}}^{p}(p^2-y^2)^{k+1/2}\,dy=$$

$$=2^4p^{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2k}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^s\binom{k+1}{s}$$

$$\Big[\Big(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{p+\sqrt{p^2-q^2}}{q}\Big)\prod_{h=0}^{k+s}\frac{2(k+s+1-h)-1}{2(k+s+1-h)}-\frac{q(p-\sqrt{p^2-q^2})^{k+s}}{2(k+s+1)(2p)^{k+s+1}}\Big]+$$

$$+2^4p^{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2k}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^{s+1}\binom{k+1}{s}\sum_{h=0}^{k+s-1}\frac{q(p-\sqrt{p^2-q^2})^{k+s-h-1}}{2(k+s-h)(2p)^{k+s-h}}$$

$$\prod_{m=0}^{h}\frac{2(k+s+1-m)-1}{2(k+s+1-m)}+2\cdot3\cdot nqp^{2n}.$$

Mettendo in relazione questo risultato con quello dato dalla (5) e tenendo conto che

$$(9)\qquad 2\Big(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{p+\sqrt{p^2-q^2}}{q}\Big)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p},$$

si deducono le due identità:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2(k+1)}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^s\binom{k+1}{s}\prod_{h=0}^{k+s}\frac{2(k+s+1-h)-1}{2(k+s+1-h)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\prod_{h=0}^{k}\frac{2(k-h)+1}{2(k-h)+2};$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2(k+1)}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^s\binom{k+1}{s} \tag{10}$$

$$\left[\sum_{h=0}^{k+s-1}\frac{(p-\sqrt{p^2-q^2})^{k+s-h-1}}{(k+s-h)(2p)^{k+s-h}}\prod_{m=0}^{h}\frac{2(k+s+1-m)-1}{2(k+s+1-m)}+\frac{(p-\sqrt{p^2-q^2})^{k+s}}{(k+s+1)(2p)^{k+s+1}}\right]=$$

$$=\sqrt{p^2-q^2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}\left[\frac{q^{2k}}{2(k+1)p^{2(k+1)}}+\sum_{s=0}^{k-1}\frac{q^{2(k-s-1)}}{2(k-s)p^{2(k-s)}}\prod_{m=0}^{s}\frac{2(k-m)+1}{2(k-m)+2}\right].$$

Per $p=q$ la (10) diventa

$$\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2k}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^s\binom{k+1}{s} \tag{11}$$

$$\left[\sum_{h=0}^{k+s-1}\frac{1}{(k+s-h)2^{k+s-h}}\prod_{m=0}^{h}\frac{2(k+s+1-m)-1}{2(k+s+1-m)}+\frac{1}{(k+s+1)2^{k+s+1}}\right]=0.$$

Mettendo infine in relazione il risultato dato dalla (8) con quello dato dalla (4), e tenendo presente che, dalle (6) (9), risulta subito

$$2\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{p+\sqrt{p^2-q^2}}{q}\right)=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{p+q}{p-q}}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{p-q}{p+q}},$$

si deducono le due identità:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2k}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^s\binom{k+1}{s}\prod_{h=0}^{k+s}\frac{2(k+s+1-h)-1}{2(k+s+1-h)}=$$

$$=\frac{n}{2(2n+1)}\prod_{h=0}^{2n-1}\frac{2(2n-h)-1}{2n-h};$$

$$\frac{n2^{2(n-1)}\sqrt{p^2-q^2}}{2n+1}\left[\frac{(p+q)^{2n-1}(2p+q)-(p-q)^{2n-1}(2p-q)}{2n(2p)^{2n+1}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{2(n-1)}\frac{(p+q)^{2n-s-1}-(p-q)^{2n-s-1}}{2(2n-s)(2p)^{2n-s}}\prod_{h=1}^{s}\frac{2(2n-h+1)-1}{2(2n-h+1)}\right]= \tag{12}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}2^{2k}\sum_{s=0}^{k+1}(-1)^s\binom{k+1}{s}$$

$$\left[\frac{q(p-\sqrt{p^2-q^2})^{k+s}}{2(k+s+1)(2p)^{k+s+1}}+\sum_{h=0}^{k+s-1}\frac{q(p-\sqrt{p^2-q^2})^{k+s-h-1}}{2(k+s-h)(2p)^{k+s-h}}\prod_{m=0}^{h}\frac{2(k+s+1-m)-1}{2(k+s+1-m)}\right]+$$

$$+\frac{nq\sqrt{p^2-q^2}}{2^3\cdot p^2}.$$

Dalla (12), per $p=q$, si ottiene ancora la (11).