BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIULIA MARTINI

Sopra un tema di concorso per i Licei

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.2, p. 171–180.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_171_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Sopra un tema di concorso per i Licei

Nota di GIULIA MARTINI (a Bologna) (*)

Sunto. - *Si dà una risoluzione del tema proposto recentemente per il Concorso a Cattedre nei Licei.*

1. Diamo una risoluzione del tema proposto, nello scorso novembre, per la prova scritta degli esami di concorso a Cattedre e di abilitazione all'insegnamento della Matematica e della Fisica nei Licei classici, scientifici e negli Istituti Magistrali.

Il tema è il seguente:

Nel piano sono dati un primo cerchio K, di centro A e di raggio $r=1$, un secondo cerchio K' di centro A' e di raggio $r'=2$, un punto P avente da A e da A' le distanze $d=2$ e $d'=4$ e, infine, due angoli $\vartheta=60°$ e $\vartheta'=45°$. Si supponga retto l'angolo APA'. In relazione a questi dati si chiede:

1°) Trovare l'equazione (in coordinate cartesiane ortogonali) del luogo L dei centri dei cerchi C che passano per P e tagliano K secondo l'angolo ϑ. Qui il candidato, a verifica del suo calcolo e come suggestivo complemento, potrà, se lo crede, aggiungere la dimostrazione sintetica che il luogo L è una iperbole i cui asintoti formano con l'asse focale un angolo la cui tangente è $\sqrt{15}$.

2°) Caratterizzare la suddetta iperbole L precisandone i fuochi, vertici e asintoti oppure un fuoco, relativa direttrice ed eccentricità.

3°) Rappresentata analiticamente la famiglia dei cerchi C, scrivere l'equazione del relativo inviluppo. Quì, come verifica ed illustrazione il candidato potrà, se crede, calcolare il suddetto inviluppo indipendentemente dalla equazione della famiglia di cerchi C.

4°) Calcolare l'area della superficie piana limitata dalla iperbole L e dalla perpendicolare al suo asse passante per uno dei due fuochi.

5°) Ricercare fra i considerati cerchi C quelli che tagliano K' secondo l'angolo assegnato ϑ'. Basterà qui limitarsi a riconoscere che la determinazione dei centri dei cerchi richiesti dipende da una equazione di quarto grado risolubile per radicali quadratici, ed indicare la via per cui tale risoluzione si effettua.

6°) Risolvere per via geometrica elementare (con riga e compasso) il problema precedente nel caso in cui tutti i dati siano generici. Qui basterà indicare la catena delle costruzioni che conducono al risultato, senza eseguire le costruzioni stesse.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Bologna.

Al candidato è lasciata facoltà di completare la sua esposizione trattando, in forma riassuntiva, uno ed uno solo dei seguenti argomenti.

7°) Generalità sugli inviluppi di sistemi di curve piane, con particolare riguardo alle serie di coniche di indice 2.

8°) Concetto e definizione di area di una superficie piana e curva.

I problemi proposti riescono lumeggiati, semplificati, tanto che per alcuni di essi la risoluzione diviene addirittura immediata, mediante la considerazione di una conveniente inversione che, com'è ben noto, costituisce sempre un mezzo efficace per la risoluzione di problemi in cui intervengono rette e cerchi.

Un'opportuna inversione muta infatti la nostra famiglia dei cerchi C che intersecano il cerchio K secondo l'angolo assegnato ϑ, nella famiglia delle rette che intersecano K secondo l'angolo ϑ, cioè nella *famiglia delle rette tangenti ad un nuovo cerchio!* Appare quindi subito l'interesse dell'uso dell'inversione nello studio dei problemi proposti.

Nel n. 2 i problemi proposti (salvo il 4°) vengono appunto risolti mediante l'inversione. Tuttavia si da nei nn. 3, 4, 5, 7 anche una risoluzione diretta dei problemi, senza cioè ricorrere alla inversione.

2. Si assuma nel piano un sistema cartesiano ortogonale di origine P ed avente per assi x, y rispettivamente le rette PA, PA' (orientati positivamente da P verso A e da P verso A').

In tale sistema il cerchio K ha l'equazione:

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0. \tag{2.1}$$

L'inversione T (1) di centro P e che muta K in sè stesso ha le equazioni

$$\bar{x} = \frac{3x}{x^2 + y^2}, \qquad \bar{y} = \frac{3y}{x^2 + y^2}. \tag{2.2}$$

I cerchi C che tagliano K secondo un angolo $\vartheta = 60°$ sono trasformati da T in rette che tagliano pure K secondo un angolo di 60°, essendo la trasformazione T conforme.

D'altra parte le rette che intersecano K secondo un angolo di 60°

(1) Per notizie sull'inversione si veda ad es. GIUDICE, *Matematica complementare,* Hoepli, Milano, p. 27, 1928. L'inversione, com'è ben noto, è una trasformazione quadratica involutoria in cui i punti fondamentali sono il centro di inversione ed i punti ciclici. Per le trasformazioni quadratiche, si veda ad es. BERTINI, *Complementi di geometria proiettiva,* Bologna, Zanichelli, p. 179, 1927.

sono tangenti al cerchio Γ_1

$$x^2 + y^2 - 4x + \frac{15}{4} = 0 \text{ [1]} . \tag{2.3}$$

Ed ora siamo in grado di rispondere alla domanda (3).

Infatti l'inviluppo delle tangenti al cerchio Γ_1 è costituito dallo stesso cerchio Γ_1. L'inviluppo della famiglia dei cerchi C è quindi la curva trasformata di Γ_1 da T ed è quindi costituita dalle rette isotrope uscenti da P e dal cerchio

$$5(x^2 + y^2) - 16x + 12 = 0 . \tag{2.4}$$

Ma anche alle domande 5), 6) si può subito rispondere.

Sia $\bar{K}'$ il cerchio corrispondente nell'inversione T al cerchio K'. I cerchi C che tagliono K' secondo un angolo $\vartheta' = 45^\circ$ sono trasformati da T in rette che tagliano $\bar{K}'$ secondo un angolo ϑ', rette che sono quindi tangenti ad un certo cerchio Γ_2.

I cerchi C *richiesti sono quindi quelli che corrispondono in* T *alle tangenti comuni ai cerchi* Γ_1, Γ_2.

Ora dal punto di vista analitico, è ben noto che la determinazione delle quattro tangenti comuni a due cerchi di cui si conoscono le equazioni dipende dalla risoluzione di una equazione di 4° grado risolubile per radicali quadratici [2].

Dal punto di vista geometrico, si ha pure immediatamente che la costruzione dei quattro cerchi C si effettua mediante riga e compasso. Infatti dai dati cerchi K, K' si perviene ai cerchi Γ_1, Γ_2 mediante costruzioni con riga e compasso poichè con riga e compasso si costruisce il corrispondente di un punto assegnato in una inversione assegnata mediante il cerchio di inversione [3]. Ed è poi ben noto come si effettui elementarmente la costruzione delle quattro tangenti comuni a due cerchi [4], dalle quali si ottengono, mediante l'inversione, i quattro cerchi richiesti.

(1) Com'è ben noto le rette che formano con un cerchio C di centro O e raggio r un angolo ϑ, sono tangenti al cerchio di centro O e raggio $r \cos \vartheta$.

(2) ENRIQUES, *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli, vol. III, p. 483, 1926.

(3) Si veda ad es. GIUDICE, op. cit. p. 157

(4) Com'è noto, esistono due omotetie che mutano uno nell'altro due cerchi dati (cfr. ad es. GIUDICE, op. cit. p. 25). Le rette tangenti condotte da uno dei due centri di omotetia ad uno dei cerchi sono tangenti anche all'altro.

Anche alla curva L (iperbole) luogo dei centri dei cerchi C che passano per P e tagliano K secondo l'angolo ϑ, richiesta nella domanda 1), si perviene agevolmente.

È noto [1] infatti che in un'inversione il centro del cerchio corrispondente ad una retta, non passante per il centro d'inversione, è il corrispondente nell'inversione del punto simmetrico rispetto alla retta del centro d'inversione.

La curva L è quindi il luogo dei punti corrispondenti in T dei punti simmetrici di P rispetto alle tangenti del cerchio Γ_1.

La tangente a Γ_1 di equazione (2.3), nel punto generico (α, β), ha l'equazione.

$$(\alpha - 2)x + \beta y - 2\alpha + \frac{15}{4} = 0, \tag{2.5}$$

dove

$$(\alpha - 2)^2 + \beta^2 = \frac{1}{4}. \tag{2.6}$$

Il simmetrico dell'origine P rispetto alla retta (2.5) è il punto Q di coordinate

$$\begin{aligned} x &= 2(\alpha - 2)(8\alpha - 15) \\ y &= 2\beta(8\alpha - 15). \end{aligned} \tag{2.7}$$

E il corrispondente di Q nell'inversione T, di equazione (2.2), ha le coordinate

$$\begin{aligned} x &= 6\frac{\alpha - 2}{8\alpha - 15} \\ y &= 6\frac{\beta}{8\alpha - 15}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

E queste al variare di α, β, legati dalla (2.6), sono pure le equazioni parametriche del luogo richiesto. Dalle (2.6), (2.8) si ha

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{(8\alpha - 15)^2}$$

e da questa e dalla prima delle (2.8), eliminando α, si ottiene

$$15x^2 - y^2 - 24x + 9 = 0, \tag{2.9}$$

che è appunto l'equazione dell'iperbole richiesta.

La curva corrispondente all'iperbole (2.9) nell'inversione (2.2) è una lumaca di PASCAL, essendo il centro di inversione fuoco dell'iperbole [2].

[1] GIUDICE op. cit. p. 33.

[2] Si veda ad es. LORIA, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, Milano, Hoepli, vol. I, pp. 179-180, 1930.

La lumaca ha l'equazione $(x^2 + y^2)^2 - 8x(x^2 + y^2) + 15x^2 - y^2 = 0$, ha

3. Nel riferimento cartesiano assunto nel n. 2, siano x,y le coordinate del centro O del cerchio generico C e sia S uno dei punti comuni a C e K. L'angolo dei cerchi C e K è $\vartheta = 60^\circ$, quindi l'angolo $\widehat{OSA}$ dei due raggi OS e AS è di 60° (o di 120°). Applicando al triangolo OSA il teorema di CARNOT, essendo $\overline{AO}^2 = (x-2)^2 + y^2$, $\overline{OS}^2 = \overline{OP}^2 = x^2 + y^2$, $\overline{AS}^2 = 1$, si ottiene

$$4x - 3 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

da cui, elevando ambo i membri al quadrato,

$$15x^2 - y^2 - 24x + 9 = 0\,. \tag{3.1}$$

È questa l'equazione dell'iperbole L cercata, coincidente con la (2.9).

Nel sistema cartesiano x', y' ottenuto dal precedente mediante la traslazione

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{4}{3} \\ y' &= y\,. \end{aligned} \tag{3.2}$$

l'iperbole L ha l'equazione (canonica)

$$25x'^2 - \frac{5}{3}y'^2 = 1. \tag{4.2}$$

La retta PA (asse x) è l'asse focale dell'iperbole (¹).

Che il luogo L fosse un'iperbole si poteva prevedere nel modo seguente. Intanto L, per definizione, è una curva algebrica i cui punti impropri sono i centri dei cerchi che si spezzano nella retta all'infinito e nelle rette passanti per P e che tagliano K secondo un angolo di 60°. Ora queste rette sono quelle passanti per P e tangenti al cerchio Γ_1 (n. 2) di centro A e raggio $\frac{1}{2}$ (²).

un nodo in P con tangenti nodali $y = \pm x\sqrt{15}$ parallele agli asintoti della iperbole. La lumaca è anche il luogo dei punti Q simmetrici di P rispetto alle tangenti del cerchio Γ_1. Osserviamo in generale che la curva γ luogo dei punti A simmetrici di un punto assegnato O rispetto alle tangenti di una curva assegnata F è la corrispondente in una omotetia di centro O e di rapporto 2 della podaria di P rispetto a F. Pertanto anche la curva γ è la podaria della curva F' corrispondente nell'omotetia alla curva F. Nel nostro caso la lumaca è quindi la podaria del cerchio corrispondente a Γ_1 nell'omotetia di centro P e rapporto 2. (Si veda ad es.: M VILLA, *Lezioni di geometria*, vol. I, Bologna, Casa Editrice U. P. E. B. pp. 88-90, 1946).

(¹) Per le nozioni relative alle coniche, si veda ad es. M. VILLA, op. cit. cap. XVIII e XXI.

(²) Si veda la nota (¹) di p. 173.

Essendo P esterno a questo cerchio, tali rette sono due reali e distinte, sicchè sono due reali e distinti i punti impropri di L, onde L è una iperbole.

Le tangenti t_1, t_2 per P al cerchio Γ_1, essendo $PA = 2$, formano con l'asse focale PA un angolo la cui tangente trigonometrica vale $\frac{1}{\sqrt{15}}$. Gli asintoti della iperbole L hanno direzioni normali a t_1, t_2 (giacendo il centro di un cerchio sulle normali del cerchio stesso) e formano quindi con l'asse focale PA un angolo la cui tangente vale $\sqrt{15}$.

4. Nel sistema x', y' l'iperbole L ha l'equazione (4.2).

Segue quindi subito che il centro è l'origine; i semiassi trasverso e non trasverso valgono rispettivamente $\frac{1}{5}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$; l'eccentricità è 4; i vertici sono $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$; i fuochi sono $\left(\frac{4}{5}, 0\right)$ e $\left(-\frac{4}{5}, 0\right)$; le direttrici relative sono $x' = \frac{1}{20}$, $x' = -\frac{1}{20}$; gli asintoti $y' = \sqrt{15}x'$, $y' = -\sqrt{15}x'$ (¹).

Nel sistema x, y tenendo conto della traslazione (3.2), si ha: il centro dell'iperbole è $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$; i vertici sono $(1,0)$, $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$; uno dei fuochi è nell'origine P, mentre l'altro è $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$; la direttrice relativa al fuoco P è $x = \frac{3}{4}$.

5. La famiglia dei cerchi C ha l'equazione

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0\,, \tag{5.1}$$

dove

$$15\alpha^2 - \beta^2 - 24\alpha + 9 = 0 \tag{5.2}$$

α, β essendo le coordinate del centro di C.

Eliminando il parametro α, si ottiene

$$\begin{aligned} &\beta^2(60y^2 - 4x^2) + 4\beta[24xy - 15y(x^2 + y^2)] + \\ &+ 15(x^2 + y^2)^2 - 48x(x^2 + y^2) + 36x^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

L'equazione dell'inviluppo della famiglia dei cerchi C si ottiene

(¹) Ciò d'accordo con quanto si è trovato nel n. 3 relativamente all'angolo dagli asintoti con l'asse focale.

pertanto annullando il discriminante della (5.3) considerata come equazione in β ed è quindi

$$(x^2+y^2)\{5(x^2+y^2)-16x+12\}=0\,. \tag{5.4}$$

Come avevamo già ottenuto nel n. 2 mediante l'inversione, l'inviluppo richiesto è costituito, oltre che dalla coppia delle rette cicliche uscenti da P, dal cerchio (2.4).

Che l'inviluppo fosse costituito dal cerchio (2.4) e dalle rette cicliche uscenti da P, si poteva dedurre anche dai ben noti risultati sugli inviluppi delle serie ∞^1 di indice 2 di coniche.

È noto infatti (¹) che tale inviluppo è una curva del quarto ordine che ha punto doppio in ogni punto base della serie di coniche e che, quando la retta congiungente due punti base fa parte di una conica sola della serie, si spezza in tale retta ed in una cubica residua. Nel nostro caso i cerchi C costituiscono appunto una serie ∞^1 di indice 2 avente per punti base i punti ciclici ed il punto P. Fra i cerchi C ne esiste uno solo che si spezza in una retta ciclica per P (²) e quindi, per quanto detto sopra, le due rette cicliche fanno parte dell'inviluppo.

Siccome la quartica inviluppo deve avere punti doppi nei punti ciclici, la conica residua dovrà passare per tali punti ed è quindi un cerchio.

6. Dall'equazione (4.2) si ha

$$y=\pm\sqrt{\frac{3}{5}(25x^2-1)}\,. \tag{6.1}$$

La metà dell'area σ della superficie piana limitata dall'iperbole (6.1) e dalla perpedicolare all'asse x passante per il fuoco $\left(\frac{-4}{5}, 0\right)$ è data da

$$\int_{-\frac{4}{5}}^{-\frac{1}{5}}\sqrt{\frac{3}{5}(25x^2-1)}dx,$$

(¹) Si veda: ENRIQUES-CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, Bologna, Zanichelli, vol. I, pp 302-304, 1915

(²) I cerchi C degeneri, come si deduce dalle equazioni (5.1) e (5.2), sono quelli costituiti dalla retta impropria e da una delle due rette passanti per P e tangenti a Γ_1 (n. 2) e quelli decomposti nelle coppie di rette $x+iy=0\,,\ x-iy-\frac{3}{2}=0$; $x-iy=0\,,\ x+iy-\frac{3}{2}=0\,.$

Di cerchi C contenenti la retta $x+iy=0$ (ad. es.) ve n'è quindi uno solo: quello che si spezza ulteriormente nella retta $x-iy-\frac{3}{2}=0\,.$

tenendo presente che il vertice del ramo d'iperbole relativo al fuoco considerato è $\left(\frac{-1}{5}, 0\right)$.

Posto $y = 5x$ si ha

$$\sigma = 2\frac{\sqrt{15}}{25}\int_{-4}^{-1}\sqrt{y^2-1}\,dy.$$

Integrando per parti, si ha

$$I = \int\sqrt{y^2-1}\,dy = y\sqrt{y^2-1} - \int\frac{y^2}{\sqrt{y^2-1}}\,dy = y\sqrt{y^2-1} - I - \int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}},$$

da cui

$$2I = y\sqrt{y^2-1} - \int\frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

Segue

$$I = \frac{1}{2}\left\{y\sqrt{y^2-1} - \log\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)\right\}.$$

Infine

$$\sigma = \frac{12}{5} + \frac{\sqrt{15}}{25}\log\left(4-\sqrt{15}\right).$$

7. Con procedimento analogo a quello seguito nel n. 3, si trova che il luogo dei centri dei cerchi che tagliano K' secondo l'angolo $\vartheta' = 45^\circ$ è una iperbole di equazione

$$x^2 - 7y^2 + 24y - 18 = 0\,. \tag{7.1}$$

I cerchi C che tagliano contemporaneamente K secondo l'angolo $\vartheta = 60^\circ$ e K' secondo $\vartheta' = 45^\circ$ sono quelli aventi centro appartenente all'iperbole (2.9) ed all'iperboli (7.1).

Come avevamo già dedotto nel n. 2 mediante l'inversione, si tratta quindi di quattro cerchi aventi i centri nei quattro punti d'intersezione delle due iperboli (2.9) (7.1).

Abbiamo già visto nel n. 2 che la determinazione di questi quattro cerchi dipende da una equazione di 4° grado risolubile per radicali quadratici. Ma a questa conclusione si perviene anche direttamente osservando che le due iperboli (2.9), (7.1) hanno il fuoco P in comune [1].

[1] Più in generale: quando siano note due tangenti comuni alle due coniche, i quattro punti comuni si determinano per radicali quadratici (si veda ad es. CASTELNUOVO, *Lezioni di geometria analitica*, ed. Dante Alighieri p. 396, 1948). Se P è un fuoco comune, le rette cicliche per P sono tangenti comuni. Si veda anche: C. TIBILETTI, *Una condizione caratteristica per le equazioni di quarto grado risolubili elementarmente*, Periodico di Matematiche, Ser. IV, vol. XXV, pp. 216-217-220, 1947.

Il punto $Q\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ in cui si intersecano le direttrici $x = \frac{3}{4}, y = \frac{3}{2}$ rispetto a P delle due iperboli è punto diagonale del quadrangolo dei quattro punti comuni alle due iperboli (1).

Nel fascio individuato dalle due iperboli

$$15x^2 - y^2 - 24x + 9 + \lambda(x^2 - 7y^2 + 24y - 18) = 0$$

la conica passante per Q è quindi degenere.

Tale conica è relativa al valore $\lambda = 1$ e si spezza nelle due rette

$$4\sqrt{2}x + 4y - 3(2 + \sqrt{2}) = 0\,, \qquad 4\sqrt{2}x - 4y + 3(2 + \sqrt{2}) = 0\,.$$

I quattro punti cercati sono dunque dati dalle soluzioni dei due sistemi di secondo grado

$$\begin{cases} 15x^2 - y^2 - 24x + 9 = 0 \\ 4\sqrt{2}x + 4y - 3(2 + \sqrt{2}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 15x^2 - y^2 - 24x + 9 = 0 \\ 4\sqrt{2}x - 4y + 3(2 + \sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$ (2).

Le intersezioni di due coniche aventi un fuoco P comune, di ciascuna conica essendo data inoltre la direttrice e un punto, si possono costruire con riga e compasso nel modo seguente.

Una conica degenere del fascio individuato dalle due coniche si compone di due rette a_1, a_2 che passano per il punto Q (in cui s'intersecano le due direttrici d_1, d_2), separano armonicamente d_1, d_2

(1) Infatti Q ha per polare sia rispettto all'una che all'altra iperbole la quarta armonica di PQ rispetto alle due rette cicliche per P. È noto (ENRIQUES, op cit. p. 472) che i quattro punti comuni a due coniche si possono determinare per radicali quadratici quando e solo quando uno dei vertici del triangolo autopolare rispetto alle due coniche ha coordinate razionali. Orbene le coordinate di Q sono appunto razionali.

(2) I due sistemi si possono scrivere

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (4x - 3)^2 \\ 4x - 3 = -\sqrt{2}\,(2y - 3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = (4x - 3)^2 \\ 4x - 3 = \sqrt{2}\,(2y - 3)\,. \end{cases}$$

A questi si può pervenire elementarmente dal sistema costituito dalle equazioni delle due iperboli che si può scrivere

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(2y - 3)^2 \\ x^2 + y^2 = (4x - 3)^2\,, \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (4x - 3)^2 \\ (4x - 3)^2 = 2(2y - 3)^2\,. \end{cases}$$

Estraendo la radice quadrata da ambo i membri di quest'ultima equazione si ottengono i due sistemi.

(essendo Q punto diagonale del quadrangolo dei punti base del fascio) e segano sopra una trasversale t qualsiasi una coppia di punti corrispondentisi nell'involuzione determinata dalle due coppie di punti in cui t sega le due coniche date [1]. La costruzione delle due rette a_1, a_2 si riduce quindi alla costruzione dei punti comuni ad una retta ed a una conica (assegnata ad es. mediante 5 punti) e a quella della coppia comune a due involuzioni in una forma di 1ª specie [2]. I quattro punti richiesti si ottengono intersecando una delle coniche assegnate con a_1 e a_2 [3].