
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LUIGI MERLI

Alcune osservazioni sulla interpolazione delle funzioni discontinue

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 4
(1949), n.2, p. 140–146.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_2_140_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Alcune osservazioni sulla interpolazione delle funzioni discontinue.

Nota di LUIGI MERLI (a Firenze) (*).

Sunto. - Si studia il comportamento di una classe di polinomi di interpolazione di una funzione continua nell'intervallo $(-1, 1)$, che nell'origine abbia una discontinuità di prima specie, allo scopo di indagare la presenza del fenomeno di GIBBS, analogamente a quanto avviene per le serie trigonometriche di FOURIER e per alcuni sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

1. Ricordiamo che assegnata una funzione $f(x)$ definita in $(-1, 1)$ ed una successione di ascisse $\{x_k^{(n)}\}$, $k = 1, 2, \dots, n$, se la si interpola col polinomio di HERMITE ⁽¹⁾,

$$(1) \quad H_{2n-1}(x) = \sum f(x_k^{(n)}) h_k^{(n)}(x),$$

dove

$$(2) \quad h_k^{(n)}(x) = v_k^{(n)}(x) l_k^{(n)2}(x),$$

con

$$(3) \quad v_k^{(n)}(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})} (x - x_k^{(n)}),$$

e

$$(4) \quad l_k^{(n)} = (n) \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \quad \omega_n(x) = c \prod_{i=1}^n (x - x_i^{(n)}), \quad c \neq 0,$$

se la successione $\{x_k^{(n)}\}$ è data dagli zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di prima specie, $\omega_n(x) = \cos n\varpi$, $x = \cos \varpi$, $x_k = \cos \varpi_k$, $\varpi_k = \frac{2k-1}{2n} \pi$, $k = 1, 2, \dots, n$, si ha uniformemente, qualunque sia la funzione $f(x)$ continua in $(-1, 1)$,

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_{2n-1}(x) = f(x), \quad (2).$$

Si consideri invece una funzione $f(x)$ continua in $(-1, 1)$, salvo nell'origine ove presenta una discontinuità di prima specie

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(1) Cfr. per le notazioni per es. L. MERLI: *Recenti risultati sulla convergenza dei polinomi di interpolazione di Lagrange e di Hermite*. «Giornale Ist. It. Attuari», XI, 1, (1940), pp. 1-12.

(2) Cfr. G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, parte 2ª. Zanichelli, Bologna, (1946) pag. 398.

e sia inoltre $f(0) = 0$. Costruiamone il relativo polinomio interpolante di HERMITE prendendo come punti fondamentali gli zeri del polinomio di TCHEBYCHEFF di prima specie, e sia $n = 4r + 1$. Indicando per brevità con $H_r(x)$ tale polinomio, avente il grado $8r + 1$, si avrà

$$(6) \quad H_r(x) = \sum_{k=1}^{2r} f(x_k^{(r)}) h_k^{(r)}(x) + \sum_{k=2r+2}^{4r+1} f(x_k^{(r)}) h_k^{(r)}(x).$$

Vogliamo far vedere che, in ogni caso, per qualunque intervallo escludente l'origine, si ha ancora uniformemente

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_r(x) = f(x).$$

Useremo per questo il procedimento di FEJER⁽³⁾. Essendo, nel nostro caso,

$$(7) \quad h_k^{(r)}(x) = \frac{(1 - xx_k^{(r)}) \omega_r^2(x)}{(4r + 1)^2 (x - x_k^{(r)})^2},$$

sarà

$$|h_k^{(r)}(x)| = h_k^{(r)}(x) \leq \frac{2}{(x - x_k^{(r)})^2 (4r + 1)^2}.$$

Sia ora $0 < \delta \leq x \leq 1$ e sia σ un numero positivo arbitrario: per l'uniforme continuità di CANTOR potremo determinare corrispondentemente un ε tale che se x' ed x'' sono due punti qualunque in $(\delta, 1)$, tali che $|x' - x''| \leq \varepsilon$, risulti $|f(x') - f(x'')| < \sigma$.

Fissato un punto x qualunque di $(\delta, 1)$, si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - H_r(x)| &\leq \left| \sum_{k=1}^{2r} [f(x) - f(x_k^{(r)})] h_k^{(r)}(x) \right| + \left| \sum_{k=2r+2}^{4r+1} [f(x) - f(x_k^{(r)})] h_k^{(r)}(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{2r} |f(x) - f(x_k^{(r)})| h_k^{(r)}(x) + \sum_{k=1}^{2r} |f(x) - f(x_k^{(r)})| h_k^{(r)}(x) + \\ &\quad + \sum_{k=2r+2}^{4r+1} |f(x) - f(x_k^{(r)})| h_k^{(r)}(x), \end{aligned}$$

se Σ' indica la somma estesa a tutti i punti tali che $|x - x_k^{(r)}| \leq \varepsilon$ e Σ'' la somma estesa a tutti gli altri punti $x_k^{(r)}$.

Sarà⁽⁴⁾

$$\sum_{k=1}^{2r} |f(x) - f(x_k^{(r)})| h_k^{(r)}(x) < \sigma \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x) \leq \sigma \sum_{k=1}^{4r+1} h_k^{(r)}(x) = \sigma;$$

d'altra parte, indicando con M il massimo del valore assoluto di

(3) Cfr. L. FEJER: *Über Weierstrassche Approximations besonders durch Hermite'schen Interpolation*. « Math. Ann. », 102, (1930), pp. 707-725.

$f(x)$, in $(-1, 1)$,

$$\sum_{k=1}^{2r} f(x) - f(x_k^{(r)}) | h_k^{(r)}(x) + \sum_{k=2r+2}^{4r+1} | f(x) - f(x_k^{(r)}) | h_k^{(r)}(x) \leq 4M \left[\sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x) + \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x) \right] \leq 4M \cdot \frac{2(4r+1)}{(4r+1)^2 \varepsilon^2} = \frac{8M}{(4r+1)\varepsilon^2},$$

per cui

$$| f(x) - H_r(x) | \leq \sigma + \frac{8M}{(4r+1)\varepsilon^2},$$

e da questa, per l'arbitrarietà di σ , quando $r \rightarrow \infty$, segue la (5), per tutti gli x per cui è $0 < \delta \leq x \leq 1$.

Analogamente si ragiona per $-1 \leq x \leq -\delta < 0$, ($\delta > 0$).

2. Vogliamo ora studiare il comportamento di $H_r(x)$, per $r \rightarrow \infty$, ne l'intorno dell'origine, analogamente a quanto si fa nel caso delle serie trigonometriche di FOURIER e per alcuni sviluppi in serie di funzioni ortogonali⁽⁵⁾: per una funzione particolare proveremo l'esistenza di un fenomeno analogo a quello di GIBBS per il caso delle serie trigonometriche di FOURIER.

Consideriamo la funzione $f(x) = x/x$ per $x \neq 0$, $f(0) =$ e studiamo il comportamento, nell'intorno dell'origine, del relativo polinomio di HERMITE:

$$(8) \quad H_r(x) = \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x) - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x).$$

Osserviamo in primo luogo che è

$$1 - H_r(x) = 1 - \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x) + \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x),$$

per cui tenuto conto che è $\sum_{k=1}^{4r+1} h_k^{(r)}(x) \equiv 1$, sarà

$$1 - H_r(x) = h_{2r+1}^{(r)}(x) + 2 \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x),$$

per cui risulterà, ricordando che è $h_k^{(r)}(x) \geq 0$,

$$1 - H_r(x) \geq 0,$$

ossia

$$(9) \quad H_r(x) \leq 1.$$

(4) Si tenga presente che è $\sum_{k=1}^{4r+1} h_k^{(r)}(x) \equiv 1$. Cfr. nota (1), loc. cit., pag. 5.

(5) Cfr. L. TONELLI: *Serie trigonometriche*. Zanichelli, Bologna, MCMXXVIII, pp. 367-361.

Analogamente, essendo

$$1 + H_r(x) = h_{2r+1}^{(3)}(x) + 2 \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x),$$

si avrà

$$1 + H_r(x) \geq 0,$$

da cui

$$(9') \quad H_r(x) \geq -1.$$

Si vede così che il polinomio interpolante resta compreso nella striscia limitata dalle ordinate -1 e $+1$, in tutto l'intervallo $-1 \leq x \leq 1$.

Si osservi ora che è $H'_r(0) = H''_r(0) = 0$.

Infatti dalla (8), derivando una prima volta, tenuto conto della (7), si ha

$$H'_r(x) = \sum_{k=1}^{2r} h'_k{}^{(r)}(x) - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h'_k{}^{(r)}(x),$$

ed essendo

$$h'_k{}^{(r)}(0) = 0, \quad \text{segue} \quad H'_r(0) = 0.$$

Derivando ancora si ha

$$H''_r(x) = \sum_{k=1}^{2r} h''_k{}^{(r)}(x) - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h''_k{}^{(r)}(x).$$

ed essendo

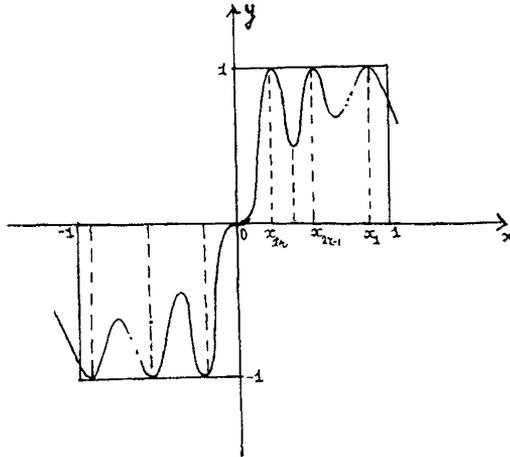
$$h''_k{}^{(r)}(0) = \frac{2 \omega'_r{}^2(0)}{(4r+1)^2 x_k^2}$$

tenuto conto che è $\omega'_r(0) = (4r+1)^2$, sarà

$$\begin{aligned} H''_r(0) &= 2 \left[\sum_{k=1}^{2r} \frac{1}{x_k^2} - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} \frac{1}{x_k^2} \right] = \\ &= 2 \left[\sum_{k=1}^{2r} \frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2(4r+1)} \pi} - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} \frac{1}{\cos^2 \frac{2k-1}{2(4r+1)} \pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

D'altra parte $H'_r(x)$ deve annullarsi nei $2r$ punti, a destra dell'origine, x_1, x_2, \dots, x_{2r} , dove il polinomio raggiunge il valore massimo 1 e nei $2r$ punti a sinistra dell'origine, $x_{2r+2}, x_{2r+3}, \dots, x_{4r+1}$, dove assume il valore minimo -1 ; $H'_r(x)$ dovrà quindi annullarsi in altri $4r-2$ punti rispettivamente compresi negli intervalli $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{2r-1}, x_{2r})$ ed $(x_{2r+2}, x_{2r+3}), \dots, (x_{4r}, x_{4r+1})$, cioè in totale in $8r-1$ punti. Ma il polinomio $H_r(x)$ ha il grado $8r+1$ ed essendo $H'_r(0) = H''_r(0)$, il polinomio avrà nell'origine un punto di flesso. Non esisteranno quindi punti in cui $H'_r(x)$ risulta uguale a zero, compresi rispettivamente negli intervalli $(x_{2r+2}, 0)$ ed $(0, x_{2r})$.

Abbiamo quindi che a destra dell'origine il polinomio $H_r(x)$ ha costantemente il massimo uguale ad 1, nei punti di ascissa x_1, x_2, \dots, x_{2r} , e quindi per $r \rightarrow \infty$ il massimo tende ad 1, tendendo x_{2r} a zero per $r \rightarrow \infty$. Analogamente per i minimi a sinistra dell'origine. L'andamento del polinomio sarà quindi quello indicato dalla figura :



Analizziamo ora il comportamento dei minimi, a destra dell'origine, quando $r \rightarrow \infty$. Consideriamo a tale scopo il primo intervallo, fra due zeri consecutivi, a destra dell'origine, cioè il tratto compreso tra x_2 , ed x_{2r-1} . Assumendo $H_r(x)$ il valore 1 agli estremi del tratto, esso assumerà il suo valore minimo in un punto

$$\bar{x}_{2r-1r} = \cos \bar{\theta}_{r-1r}, \quad \text{con} \quad \theta_{2r-1r} = \frac{2(2r-t_r) - 1}{2(4r+1)} \pi, \quad \text{con} \quad 0 < t_r < 1,$$

e tale minimo sarà dato da

$$(10) \quad H_r(\bar{x}_{2r-1r}) = \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x_{2r-1r}) - \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(\bar{x}_{2r-1r}).$$

Dovremo studiare quindi $\lim_{r \rightarrow \infty} H_r(x_{2r-1r})$. Proveremo intanto che è

$$(11) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(\bar{x}_{2r-1r}) = 0.$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x_{2r-1r}) &= \sum_{k=2r+2}^{4r+1} \frac{1 - \bar{x}_{2r-1r} x_k^{(r)} \omega_2^2(\bar{x}_{2r-1r})}{(4r+1)^2 (\bar{x}_{2r-1r} - x_k^{(r)})^2} \\ &< \omega_r^2(x_{2r-1r}) \sum_{k=r+1}^{4r+1} \frac{1}{2^r (4r+1)^2} \cdot \frac{1}{(\bar{x}_{2r-1r} - x_k^{(r)})^{2r}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_r^2(x_{2r-t_r}) \sum_{k=2r+2}^{4r+1} \frac{1}{(4r+1)^2} \cdot \frac{1}{(\cos \bar{\theta}_{2r-t_r} - \cos \theta_k^{(2)})^2} = \\
 &= \omega_r^2(\bar{x}_{2r-t_r}) \frac{1}{4(4r+1)^2} \sum_{k=2r+2}^{4r+1} \frac{1}{\frac{\text{sen}^2 \bar{\theta}_{2r-t_r} + \theta_k^{(1)}}{2} \frac{\text{sen}^2 \bar{\theta}_{2r-t_r} - \theta_k^{(r)}}{2}} < \\
 &< C \omega_r^2(x_{2r-t_r}) \frac{1}{(4r+1)^2} \sum_{k=2r+2}^{4r+1} \frac{1}{(\bar{\theta}_{2r-t_r} - \theta_k^{(r)})^2}, \quad \text{con } C
 \end{aligned}$$

costante assoluta indipendente da r . Si ha così.

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(x_{2r-t_r}) < \\
 &< C \omega_r^2(\bar{x}_{2r-t_r}) \frac{1}{(4r+1)^2} \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=2r+2}^{4r+1} \frac{4(4r+1)^2}{[2(2r-t_r) - 1 - (2k-1)]^2} = \\
 &= \frac{4C}{\pi^2} \omega_r^2(x_{2r-t_r}) \sum_{k=2r+2}^{4r+1} \frac{1}{(2k-4r+2t_r)^2} < C' \omega_r^2(\bar{x}_{2r-t_r}), \quad \text{con } C'
 \end{aligned}$$

costante assoluta, indipendente da r . Ma per $r \rightarrow \infty$, \bar{x}_{2r-t_r} , essendo compreso tra x_{2r} ed x_{2r-1} , tende a zero ed è anche $\lim_{r \rightarrow \infty} \omega_r^2(\bar{x}_{2r-t_r}) = 0$, da cui segue la (11) e quindi

$$(12) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H_r(x_{2r-t_r}) \geq 0.$$

Proveremo ora che se \bar{x}_{2r-t_r} è un punto compreso tra x_{2r} ed x_{2r-1} e precisamente della forma $\bar{x}_{2r-t_r} = \cos \bar{\theta}_{2r-t_r}$, dove

$$\bar{\theta}_{2r-t_r} = \frac{2(2r-t_r) - 1}{2(4r+1)} \pi,$$

con t fissato, indipendentemente da r , e compreso tra 0 ed 1, è

$$(13) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H_r(x_{2r-t_r}) = 0$$

e quindi

$$\lim_{r \rightarrow \infty} H_r(\bar{x}_{2r-t_r}) \leq 0,$$

da cui, per la (12),

$$(14) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} H_r(x_{2r-t_r}) = 0.$$

Con la stessa dimostrazione adoperata per la (11) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2r+2}^{4r+1} h_k^{(r)}(\bar{x}_{2r-t_r}) = 0,$$

con t fissato, indipendentemente da r , e sussisterà la (13) se pro-

veremo che è

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(x_{2r-t}) = 0.$$

Ripetendo il ragionamento precedente, osserviamo che è

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(\bar{x}_{2r-t}) &= \sum_{k=1}^{2r} \frac{(1 - \bar{x}_{2r-t} x_k^{(r)}) \omega_r^2(\bar{x}_{2r-t})}{(4r+1)^2 (\bar{x}_{2r-t} - x_k^{(r)})^2} \leq \\ &\leq C'' \omega_r^2(x_{2r-t}) \sum_{k=1}^{2r} \frac{1}{(4r - 2k - 2t)^2}, \end{aligned}$$

con C'' costante assoluta indipendente da r , ed essendo t fissato indipendentemente da r e $0 < t < 1$, sarà ancora

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2r} h_k^{(r)}(\bar{x}_{2r-t}) = 0,$$

da cui segue la (13) e quindi la (14).

La stessa dimostrazione fatta per l'intervallo (x_{2r}, x_{2r-1}) , vale se consideriamo i valori di $H_r(x)$ quando x varia tra (x_{2r-t}, x_{2r-t-1}) con t fisso.

Possiamo quindi concludere che, mentre per le serie di FOURIER i massimi di $s_n(x)$, alla destra dell'origine, tendono ad un limite che è maggiore di 1 ed $s_n(x)$ compie delle oscillazioni attorno alla retta $y = 1$, i polinomi di interpolazione considerati compiono essi pure delle oscillazioni mantenendosi però sempre ≤ 1 e mentre i massimi si mantengono costantemente uguali ad 1, i minimi tendono allo zero, per $r \rightarrow \infty$.

Analogamente si studia il comportamento alla sinistra dell'origine.

Questione Proposta.

Si dia una soluzione in numeri interi delle equazioni

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= C^2 + D^2 = E^2 + F^2 \\ A^3 + B^3 &= C^3 + D^3 = E^3 + F^3 \end{aligned}$$

A. MOESSNER.

Il Dr. Afredo Moessner, (13 a) Gunzenhausen (Germania-Baviera) Altes Schulhaus, prega i cultori di problemi diofantei e di teoria dei numeri di comunicargli il loro indirizzo.