# Bollettino Unione Matematica Italiana



Salvatore Di Noi


## Sull'abuso inveterato di un celebre teorema di Euclide


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **4** (1949), n.1, p. 79–81.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_79_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

# Sull'abuso inveterato di un celebre teorema di Euclide.

Nota di SALVATORE DI NOI (a Roma).

**Sunto.** - *Per dimostrare alcune proposizioni, vere anche nella geometria ellittica, si usa sempre il teorema dell'angolo esterno d'un triangolo, che è vero solo nella geometria iperbolica e in quella parabolica. Si propongono dimostrazioni di quelle proposizioni, indipendenti dal teorema dell'angolo esterno.*

**1.** Tutti gli autori riportano ancora nell'identico ordine le fondamentali proposizioni 18ª, 19ª e 20ª del I libro degli *Elementi* di EUCLIDE (le prime due riguardano le relazioni tra lati ed angoli opposti d'un triangolo, l'ultima afferma che un lato d'un triangolo è minore della somma degli altri due); e ancora la dimostrazione di queste tre proposizioni è basata sul teorema dell'angolo esterno (prop. 16ª). Eppure non è certo naturale far dipendere la 20ª, tanto intuitiva da apparire evidente anche ad un asino, come dicevano gli Epicurei, dalla 16ª, meno evidente e più impegnativa: la prima è conseguenza del fatto che la retta è la geodetica del piano, mentre la seconda presuppone anche l'infinità della retta.

Di più, le tre proposizioni possono apparire indissolubilmente legate alla 16ª, anche perchè il procedimento dimostrativo è rimasto intatto — ch'io sappia — per tanti secoli [1]. Ma così non è, perchè mentre la 18ª, 19ª e 20ª valgono anche sulla sfera, su questa non è valida la 16ª, che è dunque sufficiente ma non necessaria per le prime tre. Difatti, se in un triangolo $ABC$ è $AB > AC$, per poter dedurre che $\widehat{C} > \widehat{B}$, detto $D$ il punto di $AB$ per cui $AD = AC$, basta che nel triangolo $BDC$ sia $\widehat{B} < \widehat{DCB} + \pi - \widehat{CDB}$, vale a dire: $\widehat{B} + \widehat{CDB} < \pi + \widehat{DCB}$. È questa la relazione, verificata anche sulla

[1] Quest'ordine non è seguito dal VERONESE, che premette addirittura la nozione di parallelismo.

sfera, necessaria perchè siano vere le tre proposizioni, non già la 16ª, che è sovrabbondante.

2. Sorge allora il desiderio di trovare dimostrazioni per i tre teoremi, che valgano anche sulla sfera, e perciò indipendenti dalla prop. 16ª.

Ne propongo una, indicandone le premesse.

Ammettiamo questo postulato, oltre quelli dell' appartenenza e dell' ordine:

*Esiste uno ed un solo movimento che porta a coincidere un semipiano con un semipiano assegnato, e una semiretta posta sul contorno del primo con una semiretta assegnata sul contorno del secondo.*

Si possono allora stabilire le nozioni di ribaltamento d'un piano intorno ad una sua retta, di perpendicolarità fra rette, di trasporto d'un angolo, e dedurre:

a) *un angolo si può invertive con un determinato movimento;*

b) *un angolo ha una ed una sola bisettrice: l'inversione di un angolo si ha ribaltandone il piano intorno alla retta della bisettrice;*

c) *le perpendicolari ad un lato d'un angolo acuto, condotte dai punti dell'altro lato, incontrano il primo lato* (ribaltando il piano intorno alla retta di quest' ultimo);

d) *le proiezioni di un punto della bisettrice d'un angolo (convesso) sui lati di questo sono equidistanti dal vertice;*

e) *la bisettrice d'un angolo (convesso) è il luogo dei punti dell' angolo equidistanti dai lati;*

f) *le bisettrici degli angoli d'un triangolo s'incontrano in un punto interno al triangolo;*

g) *le proiezioni dell'incentro d'un triangolo sulle rette dei lati appartengono ai lati.*

Se allora $O$ è l'incentro d'un triangolo $ABC$, ed $A'$, $B'$ e $C'$ sono le sue proiezioni su $BC$, $AC$ ed $AB$, da $d$) si ha: $AC'=AB'$, $BC'=BA'$, e sommando membro a membro, tenendo conto della $g$): $AB=AB'+$ $+BA'<AC+BC$.

È così dimostrata la 20ª prop. di EUCLIDE, preparando il terreno per altre facili deduzioni.

Si dimostra subito la 19ª. Supponendo $\widehat{C}>\widehat{B}$ nel triangolo $ABC$, si stacca $\widehat{BCD}=\widehat{B}$, in modo quindi che sia $DC=BD$, e dal triangolo $ACD$ si ha: $AC<DC+DA=BD+DA=BA$.

Con la seconda legge delle inverse si ricava la 18ª.

Come si vede, i fatti da premettere alla dimostrazione non sono nuovi: nuovo è forse l'ordine secondo cui vengono presentati.

Sempre ricorrendo al ribaltamento del piano, tanto utile in quèste cose, si può ottenere altra dimostrazione dei tre teoremi, premettendo la nozione di asse d'un segmento e stabilendo queste due facili proposizioni:

1) – *Se un punto* P *è interno al semipiano* rB, *dove* r *è l'asse di un segmento* AB, *è* $\widehat{PBA} > \widehat{PAB}$; *e viceversa.*

2) – *Se* P *è interno al semipiano* rB, *dove* r *è l'asse di un segmento* AB, *è* PA > PB; *e viceversa.*

Da queste due prop. seguono immediatamente la 18ª e la 19ª prop. di EUCLIDE, di cui la 20ª è conseguenza.

Giova notare che tutto quanto s'è detto vale, *mutatis mutandis,* sulla sfera e nella stella.

**3.** Svincolate le prop. 18ª, 19ª e 20ª dalla prop. 16ª. viene curiosità di vedere quale compito rimane nella geometria Euclidea a questa proposizione, che è celebre, perchè da essa han preso le mosse quasi tutti i geometri dei secoli XVIII e XIX nelle ricerche sul postulato delle parallele.

Negli « *Elementi* » la 16ª prop. serve di premessa alla prop. 27ª, con cui si stabilisce l'esistenza di rette parallele, separando così esplicitamente la geometria Euclidea dalla ellittica. E questa è in sostanza le funzione che EUCLIDE affida alla prop. 16ª, anche se ad essa ricorre altre volte per dimostrare prop. di minore importanza (per es. le 21ª e 26ª del I libro e la 23ª del III). Col post. V EUCLIDE aveva precedentemente staccato la geometria Euclidea della iperbolica.

Ma oramai molti autori moderni preferiscono dimostrare direttamente l'esistenza di rette parallele, senza far uso della 16ª, ricorrendo ad una simmetria assiale o centrale (alla quale ultima del resto ricorre EUCLIDE per dimostrare la 16ª). Fanno vedere che se la figura formata da due rette ha un asse o un centro di simmetria esterno ad essa, le due rette non hanno punti comuni. Questi autori riducono la 16ª ad un semplice corollario della 32ª, con cui viene fissata la somma degli angoli d'un triangolo, e si servono di questo corollario soltanto per dimostrare la 18ª, 19ª e 20ª.

Se, per quanto abbiamo detto prima, la 16ª prop. non dovesse servire nemmeno a questo scopo, la sua importanza svanirebbe del tutto.