Bollettino
Unione Matematica Italiana

Aldo Andreotti

Sulla proposizione di De Zolt pei poliedri

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 68–75.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_68_0>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Sulla proposizione di De Zolt pei poliedri.

Nota di ALDO ANDREOTTI (a Pisa).

Sunto. - *Come le prime righe della Nota.*

Ci proponiamo di dare una dimostrazione rigorosa ed elementare della proposizione di DE ZOLT pei poliedri che permetta di ovviare ad alcune obbiezioni cui vanno soggette le dimostrazioni finora conosciute.

1. *Introduzione.* – È noto (1) come l'intera teoria dell'equivalenza fra poligoni (intesa come equiscomponibilità (2)) può esser sviluppata sulla base dei postulati di appartenenza, ordine, congruenza, sul postulato delle parallele e su quello di ARCHIMEDE. Precisamente, chiamando *equivalenti* due poligoni *equiscomponibili* (cioè decomponibili in un numero finito di parti poligonali due a due rispettivamente uguali) e considerando come *somma* di due poligoni ogni poligono equiscomponibile coll'insieme di quei due, si dimostra che rispetto a questi concetti di equivalenza e di somma, i poligoni formano una specie di grandezze.

Non solo, ma se nelle nozioni sopra fissate di equivalenza e di somma al concetto di equiscomponibilità si sostituisce quello di *equivalenza per differenza* (chiamando equivalenti per differenza

(1) Vedi ad es.: HILBERT, *Gründlagen der Geometrie.* Leipzig, Teubner pagg. 39 e segg. (1903).

(2) I modi di sviluppare la teoria dell'equivalenza sono, com'è noto, vari, alcuni dipendenti, altri no dalla proposizione di ARCHIMEDE. Non considero qui la questione didattica; alcuni ritengono che la trattazione di questa teoria, nella scuola, debba esser sostanzialmente ricondotta alla trattazione euclidea, come fa ad es. SEVERI nei suoi *Elementi di Geometria.* Firenze, Vallecchi, vol. 1° e 2° (1926-27).

due poligoni che siano differenze di due poligoni equiscomponibili), si può svolgere l'intera teoria senza far uso del postulato di ARCHIMEDE.

Ora per provare che i poligoni in relazione ai concetti di equivalenza e di somma stabiliti, formano una specie di grandezze, occorre dimostrare la cosidetta proposizione di DE ZOLT pei poligoni: « *decomposto un poligono in parti poligonali, la somma di queste all'infuori di una non può essere equivalente* (secondo la definizione di equivalenza adottata) *all'intero poligono* » (1).

Naturalmente la dimostrazione dovrà essere sviluppata con mezzi elementari e sulla base dei soli postulati ammessi.

Ciò è stato fatto in modo del tutto esauriente ad es. dall'HILBERT. La dimostrazione consiste, in sostanza, nel mostrare come ad ogni triangolo (e poi ad ogni poligono) si possa associare un segmento determinato (« *segmento associato* ») il quale risulti funzione additiva delle parti triangolari (e quindi anche poligonali) in cui il triangolo (poligono) può venir decomposto.

Rinviamo per l'esposizione al volume citato dell'HILBERT (2). Osserviamo solo che i postulati della congruenza e delle parallele vengono usati esclusivamente nella definizione di segmento associato ad un triangolo e nello stabilire che, se un triangolo ABC si decompone in due mediante un segmento AD che unisca A ad un punto D del lato opposto (*divisione per trasversali*), il segmento associato ad ABC è uguale alla somma dei segmenti associati ad ABD ed ACD.

In tutto ciò non si usa il postulato di ARCHIMEDE poichè la teoria delle proporzioni fra segmenti può svilupparsi indipendentemente da esso (3).

Il resto della dimostrazione si fonda sui soli postulati di appartenenza e di ordine e consiste nel provare che se un triangolo Δ è decomposto in altri Δ_k, si può trovare una ulteriore suddivisione di Δ in triangoli Δ_k' i quali si possono ottenere per successive divisioni per trasversali sia a partire da Δ che dai Δ_k (4).

(1) Si potrà vedere oltre all'opera citata di HILBERT l'articolo di U. AMALDI, *Sulla teoria dell'equivalenza*, pubblicato nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari* di F. ENRIQUES, Bologna. Zanichelli, 3ª ed., parte I, vol. 2°, pagg. 1 e segg. (1925).

(2) Vedi HILBERT, op. cit., pag. 43.

(3) Id. id. pag. 35. Vedi anche B. LEVI, *Teoria delle proposizioni fra segmenti indipendentemente dal postulato di Archimede*, « Supplemento al Periodico di Matematiche ». (Giugno 1903).

(4) Cosicchè lo stesso ragionamento può servire a provare la proposizione di DE ZOLT in geometria iperbolica o ellittica appenachè si sia os-

2. *La proposizione di De Zolt pei poliedri.* – Passando dal piano allo spazio, considerazioni analoghe alle precedenti si possono ripetere pei prismi, chiamando *equiscomponibili* due prismi (o in generale due poliedri) che si possono decomporre in parti poliedriche in un numero finito, due a due rispettivamente uguali. Sarà ora necessario dimostrare la proposizione analoga a quella di DE ZOLT (proposizione di DE ZOLT pei poliedri):

Decomposto un poliedro in parti poliedriche, la somma di queste all' infuori di una non può essere equivalente (secondo la definizione che si adotta di equiscoponibilità o di equivalenza per differenza) *all' intero poliedro.*

Anche qui basta dimostrare che ad ogni tetraedro si può associare un segmento determinato il quale risulti funzione additiva delle parti tetraedriche in cui un tetraedro può venir decomposto.

Ora la originaria dimostrazione della proposizione data dal VERONESE (1), come osserva l'Autore stesso, non esclude che possa condurre a una serie *infinita* di operazioni, nel qual caso occorrebbe fissare la legge colla quale queste operazioni si devono eseguire per esser sicuri di « invadere » colla suddivisione l' intero tetraedro. Nè a questo inconveniente sembrano aver ovviato le dimostrazioni successive che, più o meno modificato, riproducono il ragionamento del VERONESE (2).

Una dimostrazione d' indole diversa si otterrebbe estendendo allo spazio i ragionamenti con cui il GERARD (3) ed il MIGNOSI (4) dimostrano la proposizione pei poligoni (5). Essa, in sostanza, tradurrebbe sotto forma geometrica, la formula di GAUSS che assegna il volume di un poliedro orientabile e dovrebbe quindi, sotto forma

servato che il difetto, o rispettivamente l' eccesso di un triangolo è funzione additiva delle parti in cui un triangolo si può dividere con divisioni per trasversali.

(1) VERONESE, *Dimostrazione della proposizione fondamentale dell' equivalenza delle figure*, « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti », t. VI_7 pagg. 421 e segg. (1894-95).

(2) Vedi ad es.: HALSTED, *Rational Geometry*, New York, Jon Wiley, pag. 168 (1907), ed anche l' articolo citato di AMALDI.

(3) GERARD ed NIEWENGLOWSKI, *Cours de geometrie élementaire*, Paris, Carré et Naud, vol. 1°, pagg. 343 e segg. (1898-1900).

(4) MIGNOSI, *Aree e volumi indipendentemente dall' equivalenza geometrica*, « Esercitazioni matematiche », t. VII, pagg. 157 e segg. (1934).

(5) Molti, tra cui il LAZZERI, asseriscono che le dimostrazioni da loro fornite per la proposizione di DE ZOLT nel piano, si estendono allo spazio. Ciò, a quanto ci sembra, è tutt' altro che immediato, se non del tutto impossibile.

più o meno velata, far uso della nozione di volume negativo. Ciò esula da un campo strettamente elementare. Alla medesima obbiezione va soggetta la dimostrazione sviluppata dallo SCHATUNOWSKY [1].

Osserviamo infine che, inavvertitamente, queste ultime dimostrazioni fanno uso del postulato di ARCHIMEDE, dato che vi si presuppone la teoria della misura la quale invece può essere pei nostri scopi sostituita dal calcolo segmentario di HILBERT [2].

3. *Dimostrazione della proposizione.* – La dimostrazione che esporremo è la diretta estensione allo spazio di quella data dall' HILBERT pei poligoni e, come quella, risulta indipendente dal postulato di ARCHIMEDE. Sarà bene pertanto tener presente la dimostrazione della proposizione di DE ZOLT pei poligoni come trovasi nel loc. cit. di HILBERT o nell'articolo citato di AMALDI.

Poniamo la seguente definizione: Dato un tetraedro Δ, fissato un segmento u e costruiti i segmenti associati alle sue faccie in corrispondenza ad u, dai teoremi sui triangoli simili discende facilmente che quei segmenti sono inversamente proporzionali alle altezze di Δ relative alle medesime faccie. Risulta quindi perfettamente individuato il segmento $\sigma(\Delta)$, quarto proporzionale dopo u, il segmento associato ad una faccia e la corrispondente altezza. A $\sigma(\Delta)$ daremo il nome di *segmento associato al tetraedro* Δ.

Ciò posto dimostriamo il teorema: *Se il tetraedro* $\Delta \equiv \mathrm{ABCD}$ *è decomposto in tetraedri* $\Delta_k \equiv \mathrm{A}_k\mathrm{B}_k\mathrm{C}_k\mathrm{D}_k$, *il segmento associato a* Δ *è uguale alla somma dei segmenti associati ai* Δ_k:

$$\sigma(\Delta) = \Sigma_k \sigma(\Delta_k).$$

A fondamento delle considerazioni che seguono, sta la seguente osservazione:

se un tetraedro $ABCD$ (fig. 1) si divide in due altri $ABCE$, $ABDE$ con un triangolo ABE congiungente uno spigolo AB con un punto E dello spigolo opposto (*divisione per trasversali*) risulta, come subito si verifica:

$$\sigma(ABCD) = \sigma(ABCE) + \sigma(ABDE).$$

[1] SCHATUNOWSKY, *Ueber den Rauminhalt der Polieder*, « Mathematische Annalen », Bd 57, pagg. 496 e segg. (1903).

[2] È chiaro che se non si bada nè ai mezzi, nè ai postulati che si ammettono, il teorema discende subito dall'additività dell'integrale di volume.

Infatti ammessi i postulati di ARCHIMEDE e della continuità (secondo CANTOR), come insegna la Geometria Analitica, si può porre una corrispondenza biunivoca e continua fra lo spazio geometrico ed un S_3 numerico euclideo. Basta allora assumere come « segmento associato » a un tetraedro l'integrale di volume esteso alla corrispondente regione di S_3.

Osserviamo inoltre che il teorema è senz'altro dimostrato nei due casi particolari seguenti:

1°) Se i tetraedri Δ_k hanno i vertici esclusivamente sugli spigoli di Δ, che escono da uno stesso vertice, (basta ragionare come pel caso analogo nel piano).

2°) se i tetraedri Δ_k hanno tutti un vertice coincidente con uno stesso di Δ e quindi si ottengono proiettando da questo vertice una divisione in triangoli della faccia opposta di Δ, (ragionamento « duale » di quello che si usa nella seconda parte della dimostrazione nel piano).

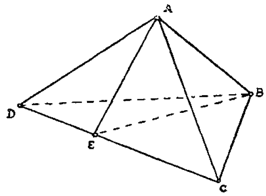

Fig. 1.

Ciò posto veniamo al caso generale e consideriamo un Δ_k che non abbia un vertice in A. Due soli casi possono presentarsi (1):

a) A è sopra una retta che unisce un vertice, p. es. A_k, con un punto M della faccia opposta (fig. 2)

Allora avremo, se M è interno alla faccia $B_kC_kD_k$:

$$\sigma(\Delta_k) = \sigma(A_kMB_kC_k) + \sigma(A_kMC_kD_k) + \sigma(A_kMD_kB_k)$$

Invero basta dividere dapprima Δ_k col piano A_kB_kM in due altri tetraedri ed applicare l'osservazione fondamentale.

Ovvie modificazioni se M è su uno dei lati della faccia $B_kC_kD_k$.

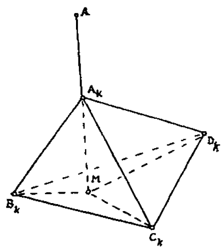

Fig. 2.

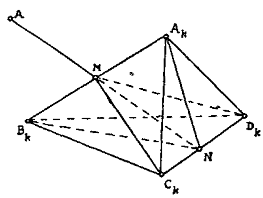

Fig. 3.

b) A è su una retta che si appoggia in due punti M, N interni a due spigoli opposti, ad es. A_kB_k C_kD_k, (fig. 3).

Allora risulta:

$$\sigma(\Delta_k) = \sigma(MNA_kC_k) + \sigma(MNA_kD_k) + \sigma(MNB_kD_k) + \sigma(MNB_kC_k).$$

Eseguendo in ogni Δ_k che non si appoggia ad A la divisione suindicata, Δ risulta decomposto in tetraedri, ciascuno dei quali ha

(1) A seconda che A è, o meno, in uno dei triedri del tetraedro Δ_k o nel suo opposto al vertice.

uno spigolo allineato con A. In virtù delle relazioni testè scritte, basterà provare il teorema nel caso che ciascun Δ_k abbia uno spigolo, A_kB_k, allineato con A.

Proiettiamo da A gli spigoli dei Δ_k sulla base BCD. Si ha su BCD un numero finito di triangoli i lati dei quali decompongono BCD in poligoni (convessi o no) due a due senza punti interni comuni. Ciascuno di questi può esser decomposto in triangoli. Proiettando da A questi triangoli, otteniamo un sistema di tetraedri D_h.

Sulla faccia $B_kC_kD_k$ di uno fissato Δ_k^1 dei Δ_k che non si appoggiano ad A, consideriamo la divisione in triangoli staccatavi dai D_h. Da B_k proiettiamo i vertici di quei triangoli su C_kD_k (fig. 4) ed aggiungiamo nei quadrangoli, che eventualmente si venissero a formare una diagonale. Con proiezione da A eseguiamo la divisione corrispondente nei D_h che stanno nel triedro $\widehat{AB_kC_kD_k}$. Si osservi che le divisioni che così si operano nei D_h possono pensarsi sempre eseguite per divisioni trasversali con piani uscenti da A (cfr. caso 2°)). Indichiamo ancora con D_h i tetraedri ottenuti. Andando da C_k a D_k sullo spigolo C_kD_k, siano $Q', Q'', \ldots$ i vertici dei triangoli della divisione operata su $B_kC_kD_k$; risulta (caso 1°)):

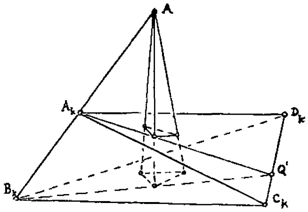

Fig. 4.

$$\sigma(\Delta_k) = \sigma(A_kB_kC_kQ') + \sigma(A_kB_kQ'Q'') + \ldots .$$

4. Consideriamo uno, ad es. $A_kB_kC_kQ'$, di quest'ultimi tetraedri. I D_h contenuti nel triedro $\widehat{AB_kC_kQ'}$ hanno gli spigoli esclusivamente sulle faccie $B_k\widehat{A}C_k$, B_kAQ', che escono dallo spigolo allineato con A.

Vogliamo dimostrare che ciascuna delle parti staccate dai D_h in $A_kB_kC_kQ'$ può essere decomposta in tetraedri $\Delta_k' \equiv A_k'B_k'C_k'D_k'$, coi vertici esclusivamente sugli spigoli del corrispondente D_h ed in modo che si abbia:

$$\sigma(A_kB_kC_kQ') = \Sigma\, \sigma(\Delta_k').$$

Ed invero, se il numero delle parti è 1, la cosa è senz'altro evidente. Ammessala quindi pel caso che il numero delle parti sia $n-1$, dimostriamola pel caso che quel numero sia uguale ad n.

Sopprimiamo la parte $C_kQ'EF$ (fig. 5), che si appoggia allo spigolo C_kQ' e che è già di suo un tetraedro e tracciamo nella parte rimanente, e sia $A_kB_kC_kEF$, il piano B_kC_kF (se F è quello dei due punti E; F, che non sta su B_kC_kQ'). Questa resta divisa nel tetraedro $A_kB_kC_kF$, che gode delle stesse proprietà di $A_kB_kC_kQ'$ e pel quale il numero delle parti in cui è diviso dai D_h è $n-1$, e nel tetraedro

B_kC_kEF, nel quale le parti staccate dai D_h se non son già tetraedri, sono piramidi quadrangolari col vertice su B_kC_k e la base su B_kEF (fig. 6).

Dividiamo ciascuna di queste piramidi in due tetraedri con un piano che dal vertice proietta una diagonate della base; B_kC_kEF

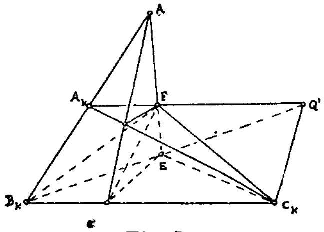

Fig. 5.

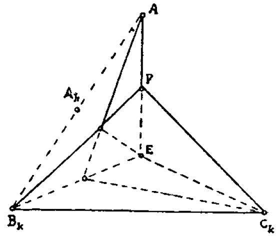

Fig. 6.

resta così decomposto in tetraedri Δ_k' coi vertici esclusivamente sugli spigoli uscenti da B_k. Pertanto (caso 1°))

$$\sigma(B_kC_kFE) \doteq \Sigma\, \sigma(\Delta_k').$$

Ciò prova l'asserto dato che i Δ_k' hanno i vertici sugli spigoli dei D_h. Osserviamo che i Δ_k' per la loro posizione dentro i D_h hanno necessariamente uno spigolo allineato con A.

Diviso dunque Δ_k^1 in tetraedri Δ_k' nel modo indicato, avremo, in virtù delle relazioni scritte:

$$\sigma(\Delta_k^1) = \Sigma\, \sigma(\Delta_k').$$

5. Consideriamo ora un'altro tetraedro Δ_k^2 non appoggiato ad A. Operiamo come sul precedente, avendo cura — qualora uno dei D_h, che già penetrano all'interno di Δ_k^1, si debba dividere in due altri con un piano per uno spigolo uscente da A (¹) — di eseguire nei Δ_k' di Δ_k^1 le seguenti divisioni

a) se quel piano passa per $A_k'B_k'$ (fig. 7), detto E il punto in cui incontra $C_k'D_k'$, dividiamo Δ_k' nei tetraedri $A_k'B_k'C_k'E$ e $A_k'B_k'D_k'E$.

b) se quel piano passa invece, ad es., pel vertice D_k' (fig. 8), detti E, F i punti in cui incontra $C_k'A_k'$ e $C_k'B_k'$, dividiamo Δ_k' nei tetraedri $A_k'B_k'D_k'E$, $A_k'D_k'EF$, $C_k'D_k'EF$.

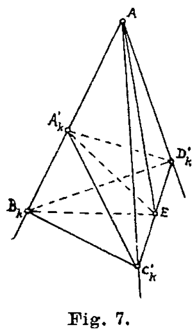

Fig. 7.

(¹) Abbiamo già osservato che le divisioni che si operano *nei* D_h possono pensarsi sempre eseguite per applicazione successiva di divisioni trasversali con piani uscenti da A.

Così proseguiamo finchè avremo esaurito i tetraedri Δ_k che non si appoggiano ad A. In quei Δ_k che hanno un vertice in A eseguiamo la divisione in tetraedri che vi viene staccata dai D_h corrispondenti all'ultima divisione.

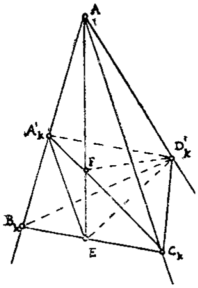

Fig. 8.

Ciascuna Δ_k risulterà in definitiva decomposto in altri tetraedri Δ_k'' e si avrà in ogni caso (pei Δ_k appoggiati ad A cfr. caso 2°)):

$$\sigma(\Delta_k) = \Sigma\,\sigma(\Delta_k'').$$

D'altra parte i Δ_k'' si trovano disposti entro i D_h ed hanno i vertici esclusivamente sugli spigoli dei D_h che escono da A. Risulta allora (caso 1°)): $\sigma(D_h) = \Sigma\,\sigma(\Delta_k'')$, la somma estesa ai Δ_k'' che compongono D_h.

Ma è pure: $\sigma(\Delta) = \Sigma\,\sigma(D_h)$ (caso 2°)). Pertanto

$$\sigma(\Delta) = \Sigma\,\sigma(D_h) = \Sigma\,\sigma(\Delta_k'') = \Sigma\,\sigma(\Delta_k). \qquad \text{c. v. d.}$$

Osservazione 1ª. - Nella dimostrazione precedente, tolta l'osservazione preliminare, si fa uso esclusivamente dei postulati di appartenenza e di ordine.

Una volta si fosse provata l'esistenza di una funzione additiva delle parti in cui un tetraedro può esser decomposto con divisioni trasversali anche in geometria iperbolica o ellittica, il teorema analogo risulta acquisito automaticamente anche in questi casi.

Osservazione 2ª. - Sulla nozione di segmento associato ad un poliedro (somma dei segmenti associati ai tetraedri in cui il poliedro può esser decomposto con una divisione qualsiasi) si può fondare tutta la teoria dell'equivalenza fra poliedri senza far uso del postulato di Archimede (cfr. Hilbert op. cit.). Naturalmente questo concetto di equivalenza è più esteso del concetto di equiscomponibilità.