Bollettino
Unione Matematica Italiana

Beppo Levi

Sopra l'aritmetica transfinita

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 1–6.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

SEZIONE SCIENTIFICA

PICCOLE NOTE

Sopra l'Aritmetica transfinita.

Nota di BEPPO LEVI (a Bologna e Rosario).

Sunto. - *Viene esposto in forma riassuntiva il contenuto di sette lezioni, sull'argomento suddetto, tenute dall'autore nel gennaio-febbraio 1949 presso il Seminario Matematico dell'Università di Bologna.*

Com'è noto, si deve a GIORGIO CANTOR la nozione della *potenza di un aggregato* e la dimostrazione della esistenza di potenze distinte, concretata dapprima nella non-numerabilità dell'aggregato dei numeri reali e generalizzata poi all'affermazione dell'esistenza di infinite potenze differenti. Per stabilire questo secondo fatto basta la ripetuta applicazione del processo diagonale che è lo strumento più conosciuto, sebbene non il primo in ordine di tempo e di concetto, usato da CANTOR per la dimostrazione della detta non-numerabilità e che pure si applica correntemente per dimostrare, per es., che l'aggregato delle funzioni di una variabile reale ha potenza maggiore che l'aggregato dei numeri reali; però CANTOR preferisce, principalmente nell'ultima fase del suo pensiero, riferirlo ad una ipotetica successione ben ordinata delle potenze, che, sul suo esempio, si rappresenta generalmente con

$$\aleph_0, \quad \aleph_1, \quad \aleph_2, \dots .$$

Sebbene CANTOR dica, per es. nella sua corrispondenza con DEDEKIND, di essere in possesso di una dimostrazione di questa affermazione, nulla sappiamo di essa o del suo fondamento, e gli autori che sono venuti poi hanno ritenuto possibile e conveniente di prendere come base un nuovo postulato, costruito ad hoc, il conosciuto *postulato di Zermelo.*

Ai critici e oppositori si osserva che il matematico può dedurre liberamente da qualunque sistema di postulati che non sia contradditorio, e che finora non è stata dimostrata la contradditorietà di questo cogli altri che senza discussione si accettano per caratterizzare la nozione di *aggregato*. Appare evidente nondimeno che, affinchè una teoria matematica abbia interesse, è necessario che in essa rientrino, almeno come casi particolari, determinati fatti matematici forniti dall'intuizione; nel caso presente potrà essere accettabile un sistema di postulati come definizione della nozione di *aggregato,* solo in quanto, indipendentemente da qualunque eventuale decisione arbitraria, siano i detti postulati riconosciuti veri nei casi particolari che noi ordinariamente chiamiamo aggregati; in particolare nell'aggregato dei numeri reali, quale è concepito secondo la tradizione (precisamente, la tradizione euclidea).

In verità la nozione di aggregato ci è fornita dalla logica: *ogni qualvolta ha senso la proposizione:* « a *è un* A », a *è un elemento e* A *è un aggregato.* La logica c'insegna inoltre che sugli aggregati possiamo eseguire alcune operazioni e precisamente di: *Somma* (caratterizzata dal postulato: esiste un aggregato i cui elementi sono tutti e soli gli elementi di più aggregati dati); *Intersezione* (caratterizzata dal postulato: esiste un aggregato di cui sono elementi tutti e soli gli elementi comuni a più aggregati dati). Infine, come generalizzazione delle operazioni di riunione e di riferimento, ammettiamo che: dati più aggregati, risulta definito un nuovo aggregato (*Prodotto* dei dati), i cui elementi risultano dalla riunione di elementi appartenenti uno (e uno solo) a ciascuno dei detti aggregati; e dati due aggregati A e B risulta definito un nuovo aggregato A^B i cui elementi si ottengono, ciascuno, associando a ogni elemento di B un elemento di A; chiameremo questa operazione *Esponenziazione* di A per B; essa è ordinariamente postulata dagli AA. (Zermelo, Fraenkel, Bernays) nel caso particolare di $A = 2$ sotto la forma: Esiste la *Potenzmenge* di un aggregato B, i cui elementi sono gli aggregati parziali di B.

Tutte queste operazioni soddisfano alla condizione essenziale posta da Cantor come definizione di « teoria degli aggregati », vale a dire di essere indipendenti dalla natura degli elementi costituenti gli aggregati considerati; se quindi ad alcuni degli aggregati di partenza si sostituiscono altri della stessa potenza, anche la potenza dell'aggregato generato dall'operazione resta invariata. Ne segue che ognuna delle operazioni predette definisce una corrispondente operazione a risultato univocamente determinato sulle potenze degli aggregati; a ciascuna di queste operazioni fra potenze conserveremo lo stesso nome della corrispondente operazione fra aggregati.

Sono ora di fondamentale importanza i teoremi seguenti:

a) La potenza somma di più potenze date (eventualmente infinite) è maggiore o uguale a ciascuno degli addendi.

Se nella somma $a+b$ di due potenze uno dei termini, a, soddisfa alla relazione $2a=a$ e l'altro termine b è comparabile con a (cioè ha senso una delle relazioni $b >$, $=$ o $< a$), allora $a+b$ è precisamente uguale alla massima delle potenze a, b.

b) Se è data un'infinità di potenze fra le quali non vi sia una massima, la potenza somma è maggiore (non uguale) di ciascuno degli addendi.

c) Data una potenza a e date altre potenze b_1, b_2,... in numero finito o infinito numerabile, tali che per ogni i sia $a+b_\iota=a$, allora anche

$$a+\Sigma\, b_\iota = a.$$

d) Sia a_1, a_2,... una successione infinita (numerabile) di potenze crescenti e si ponga

$$b=\Sigma\, a_\iota\,;$$

se nella successione delle a_ι ne esistono infinite (quindi di indice comunque elevato) che soddisfano alla condizione $2a_\iota = a_\iota$, allora b è maggiore di ogni potenza p che sia minore di qualche a_ι (prop. *b*) e, qualunque sia una potenza $p<b$, esistono fra le a_ι infinite $>p$.

Questa proprietà dà ragione di chiamare, *per definizione*, la somma b *limite (superiore) delle* a_1.

È

$$2b=b.$$

Dalle cose dette in principio segue che, per poter svolgere concretamente una *teoria di aggregati*, sarà necessario partire da alcuni aggregati definiti assiomaticamente (pur sotto la condizione che l'assiomatica abbia tal forma da riferirsi unicamente alle relazioni fra gli elementi costituenti, in quanto appartenenti all'aggregato, indipendentemente dalla natura specifica di essi elementi), poichè nulla potrebbe dedursi dalla semplice affermazione astratta che esistano degli elementi e tali che abbia senso la proposizione « e è un a ». A tali aggregati iniziali si potranno associare in seguito altri, derivati da essi mediante l'applicazione delle operazioni sopra definite.

Nella nostra ordinaria analisi matematica gli aggregati definiti assiomaticamente sono quello dei numeri naturali, quello dei numeri reali e i loro segmenti. Nondimeno sappiamo che. dal punto di vista della potenza, se chiamiamo Z l'aggregato dei numeri naturali, possiamo sostituire all'aggregato dei numeri reali, l'aggregato derivato 2^Z (numeri decimali binari) oppure Z^Z (frazioni continue). Ci fisseremo ora sopra questo primo caso. Come d'abitudine, chiameremo $\aleph_0$ la potenza di Z; sarà essenziale il fatto che $2\aleph_0 = \aleph_0$; e giova notare che la dimostrazione di questa uguaglianza deriva precisamente dalle proprietà assiomaticamente attribuite all'aggregato Z, che permettono scomporlo nei due aggregati equivalenti dei numeri pari e dei dispari, ma non si potrebbe in alcun modo dedurre dalla sola nozione astratta di *aggregato*. Indicheremo cogli ordinari simboli numerici le potenze dei segmenti F di Z. Dalla definizione assiomatica di Z risulta che, da questi aggregati iniziali, mediante le operazioni di somma, intersezione e prodotto non si generano nuove potenze. Si ha invece

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = m^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} \quad (m \text{ numero naturale qualunque}).$$

La nuova potenza così definita si chiamerà c_1 (potenza del continuo):

$$c_1 = 2^{\aleph_0}.$$

Analogamente porremo

$$c_2 = 2^{c_1}$$

e in generale

$$c_{\iota+1} = 2^{c_\iota}.$$

Si dimostra che, per ogni valore dell'indice i,

$$2c_\iota = c_\iota\,;$$

si può quindi considerare la potenza

$$c_\omega = \lim c_\iota$$

e sarà pure

$$2c_\omega = c_\omega\,.$$

Si vede facilmente che il procedimento di esponenziazioni e limiti si può così proseguire in modo da generare una successione di potenze crescenti ordinata secondo i numeri della seconda classe di CANTOR; e si dimostra che tal successione forma un sistema completo rispetto alle operazioni di somma, prodotto e esponenziazione, nel senso che la ripetuta applicazione di queste operazioni sopra aggregati aventi le dette potenze conduce sempre a potenze della successione medesima. Precisamente valgono le regole aritmetiche seguenti:

La somma di due potenze c_ι è uguale alla maggiore di esse.

Il prodotto di due potenze c_ι è pure uguale alla maggiore di esse.

Per la esponenziazione è necessario distinguere secondo si tratti di c_i definite come potenze di 2 o di quelle che si definiscono come limite di una successione crescente di tali potenze. Elevando una c_i del primo tipo a una potenza di indice minore si riottiene la potenza medesima; se invece l'esponente ha indice superiore o uguale alla base il risultato sarà la potenza di indice immediatamente superiore a quello dell'esponente. Se invece la base è una c definita come limite, il risultato della esponenziazione sarà la potenza medesima se l'esponente è un numero naturale; sarà la potenza successiva se l'esponente è $\geq \aleph_0$, ma non maggiore della base; infine sarà la potenza successiva all'esponente se questo è maggiore della base.

Le dimostrazioni dei teoremi sopra accennati possono leggersi nell'articolo da me recentemente pubblicato in « Mathematicae Notae » col titolo: *Ensayo historico y critico sobre la aritmetica de los conjuntos y el problema del continuo*. Ciò che mi pare essenziale è di aver mostrato come tale aritmetica sia realmente possibile senza la introduzione di postulazioni come quella di ZERMELO che, meglio che matematiche, dovrebbero definirsi come metafisiche in quanto affermano la esistenza di alcunchè inafferrabile e non identificabile nel pensiero di due individui che prendano parte al ragionamento, nè, in istanti diversi, nel pensiero di una stessa persona.

Un fatto notevole è che la successione di potenze che si è sopra definita soddisfa a tutte le proprietà che ordinariamente si pretendono per la ipotetica successione delle $\aleph$, secondo CANTOR: fatta nondimeno eccezione per l'affermazione cantoriana che tal successione di potenze possa prolungarsi al di là di ogni concepibile: nel caso nostro gli indici delle c_i non possono superare la seconda classe degli interi di CANTOR.

Resta aperta la domanda se esistano potenze intermedie fra le varie c_i, in particolare se ne esistano fra la potenza $\aleph_0$ e la potenza del continuo; nondimeno è provato che la generazione di tali eventuali potenze non potrebbe ottenersi mediante l'applicazione delle operazioni che ordinariamente si ammettono possibili sugli aggregati, come tali. Essa dovrebbe quindi provenire da una più profonda analisi dei postulati che caratterizzano gli aggregati di partenza (dei numeri naturali e dei reali), che difficilmente si può immaginare.

Importa però notare che il procedimento assiomatico permette di definire altri aggregati basici, analogamente alla definizione del l' aggregato dei numeri naturali; di ciò pure abbiamo dato esempio nell' articolo citato, definendo assiomaticamente gli aggregati ben ordinati di potenze successive, le quali riteniamo però incomparabili colla potenza del continuo in conseguenza della indipendenza dei concetti a cui si riferiscono gli assiomi che determinano le proprietà caratteristiche degli elementi degli aggregati considerati.