BERTRAND GAMBIER

Points et tangentes d'inflexion d'une cubique plane de genre un

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **4** (1949), n.1, p. 13–16.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1949_3_4_1_13_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1949.

Points et tangentes d'inflexion d'une cubique plane de genre un.

Nota di BERTRAND GAMBIER (a Parigi).

Sunto. - *Sulle coniche toccate da sei tangenti d'inflessione di una cubica piana.*

1. Soit une cubique plane Γ de genre un; considérons l'une des 4 répartitions des 9 points d'inflexion sur 3 droites $A(A_1, A_2, A_3)$ $B(B_1, B_2, B_3)$, $C(C_1, C_2, C_3)$: *les 6 tangentes inflexionnelles aux points* B_i, C_j *sont tangentes à une même conique* γ *qui touche* B, C *aux points où* A *rencontre* B *et* C. En effet A_1 est pôle d'une homologie involutive, dont l'axe est la polaire de A_1 par rapport au couple B, C, transformant Γ en elle-même et les tangentes aux B_i en les tangentes aux C_j (dans un ordre inutile à préciser ici): ces 6 tangentes touchent donc une même conique γ coupant B en deux points qui, par l'homologie précédente, deviennent les points où γ coupe C; mais ce raisonnement est valable aussi pour chaque point A_2 ou A_3 et sa polaire relative au couple B, C, de sorte que les points communs à γ et B sont confondus et notre théorème est établi. Il résulte de là que, dans le cas très particulier où les tangentes en A_1, A_2, A_3 concourent en un même point, chaque conique (A, B) ou (A, C) dégénère en deux points, donc que les tangentes en B_1, B_2, B_3 concourent aussi, ainsi que les tangentes en C_1, C_2, C_3 et que le point de concours relatif à une droite A, B ou C est le point commun aux deux autres.

2. Par dualité, cette proposition se ramène à une forme métrique rendant aisée la vérification analytique. Les 9 tangentes de rebroussement d'une courbe plane de classe 3 et genre un peuvent, de 4 façons, être réparties en trois groupes de trois tangentes concourantes; soit (I, J, K), (L_1, L_2, L_3), (L_1', L_2', L_3') une telle répartition des neuf points de rebroussement, O, λ, λ' étant les points de concours relatifs à ces 3 groupes; une transformation homographique éventuelle permet de supposer que I, J sont les points cycliques; OK est alors axe de symétrie, (L_i, L_i'), (λ, λ') se correspondant dans cette symétrie. Les tangentes issues à la courbe d'un point P arbitraire admettent PO pour l'une de leurs trisectrices, de sorte que $(L_iO, L_i\lambda)$ est un angle orienté égal à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$; par raison de symétrie, $(L_1O, L_1\lambda)$. $(L_2O, L_2\lambda)$, $(L_3O, L_3\lambda)$ sont égaux (et non l'un opposé aux deux autres): O, λ, L_1, L_2. L_3 sont donc sur un même cercle, c'est-à-dire sur une conique passant en O, λ, L_1, L_2, L_3, I, J et *par suite aussi* K, en raison de la symétrie du rôle de I, J, K; ce cercle est tangent en O et λ aux droites $\lambda'O$, $\lambda'\lambda$.

Si l'on traite la question par le calcul, on peut prendre pour équation tangentielle de la courbe de classe 3, $w^3 + 3(u^2 + v^2)(Au + w) = 0$ et le point K a pour coordonnées $(A, 0)$; les coordonnées de λ et λ' sont $\left(\frac{3A}{2}, \frac{A\sqrt{3}}{2}\right)$ pour λ, $\left(\frac{3A}{2}, -\frac{A\sqrt{3}}{2}\right)$ pour λ'; O, λ, λ' forment un triangle équilatéral de centre K; le cercle $(O, \lambda, L_1, L_2, L_3, I, J, K)$ a pour équation $x^2 + y^2 - Ax - Ay\sqrt{3} = 0$. Le cas de dégénérescence signalé au paragraphe précédent est réalisé par la courbe d'équation $w^3 + 3(u^2 + v^2)\, u = 0$.

3. On peut se demander quel est l'énoncé projectif qui correspond à l'énoncé métrique que nous venons de donner au paragraphe qui précède: donnons le pour les cubiques Γ de genre un. *Etant donné une droite quelconque* D *coupant* Γ *en* M_1, M_2, M_3 *et* *la droite* $A_1A_2A_3$ *en* d, *projetons* M_1, M_2, M_3 *sur* D *en* m_1, m_2, m_3 *à partir du point* α_3 *commun aux tangentes en* A_1, A_2: *le produit des 3 birapports* ($A_1A_2dm_i$) *est égal à l'unité.*

Cet énoncé, pour frapper l'imagination a lui-même besoin d'une forme métrique: nous l'obtenons en supposant que A_1, A_2 sont devenus les points cycliques I, J et que O est le point commun aux deux asymptotes inflexionnelles correspondantes: *si l'on coupe la cubique par une droite quelconque* D, *les droites* OM_1, OM_2, OM_3 *joignant le foyer* O *aux points d'intersection ont une de leurs tri-sectrices parallèle à* D.

4. Celte méthode nous fait découvrir un théorème plus général. Les équations

$$w^p + (u^2 + v^2)f_{p-2}(u,\ v,\ w) = 0, \quad \text{ou} \quad z^p + (x^2 + y^2)f_{p-2}(x,\ y,\ z) = 0,$$

où u, v, w sont des coordonnées cartésiennes de droites, x, y, z des coordonnées cartésiennes homogènes de points, et où f_{p-2} est un polynôme homogène de degré $p-2$, sont les équations, tangentielle ou ponctuelle respectivement, *de courbes algébriques de classe* p *ou degré* p, *telles que: pour la première, tout système de tangentes concourantes admette pour* p*-sectrice la droite joignant leur point de concours à l'origine, et, pour la seconde, les rayons joignant l'origine aux points communs à la courbe et à une droite* D *quelconque admettent comme direction de p-sectrice particulière la droite* D.

Additif. – Au moment où cette Note va être publiée, M. B. SEGRE veut bien me faire remarquer que le résultat a été signalé, moins complètement d'ailleurs, par une méthode differente par LAGUERRE (« Journ. de Math. » 1872, *Oeuvres*, t. II, pp. 188-273, n. 17). M. B. SEGRE propose lui-même une nouvelle méthode, conduisant comme il suit à la proposition réciproque.

« All'uopo basterà mostrare — per dualità — che, se una se- « stica piana C possiede nove cuspidi e sei di queste stanno su « di una conica, allora le tangenti nelle rimanenti tre cuspidi for- « mano fascio. Invero C può in tal caso ottenersi come contorno « apparente sul piano π di C di una superficie cubica F, da un « punto P non situato su F, in modo che le sei cuspidi di C si- « tuate su di una conica risultino le proiezioni da P su π delle « intersezioni di F colla 1^a e colla 2^a polare di P rispetto ad F: « e ciò in base ad un teorema generale stabilito in B. SEGRE, « Mem. Acc. d'Italia », 1 (1930), n. 21. Le tre cuspidi ulteriori

« di C provengono da tre punti doppi biplanari di F. Ora è noto « che, se una superficie cubica F ha tre punti doppi biplanari, gli « assi a questi relativi (ossia le tre rette intersezioni delle coppie « di piani in essi tangenti ad F) concorrono in un punto: il risul« tato da stabilire segue allora subito per proiezione da P su π.
« Pertanto:

« *Affinchè le tangenti in sei punti di flesso di una cubica ellittica « tocchino una conica, occorre e basta che i rimanenti tre flessi « siano allineati.*

« Si può infine rilevare che la concorrenza in un punto degli « assi relativi ai tre punti doppi biplanari di una superficie cu« bica, F, equivale al fatto ben noto che ogni quartica piana tricu« spidata ha le sue tre tangenti cuspidali formanti fascio (fatto che, « per dualità, si riduce senz'altro ad una classica proprietà di al- lineamento dei flessi di una cubica piana). Invero il contorno « apparente di F su di un piano, da un punto generico della F « medesima, risulta appunto una quartica tricuspidata ».