Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giuseppe Palamà

# Saggio di una nuova trattazione delle multigrade

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **3** (1948), n.3, p. 263–278.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_263_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

# Saggio di una nuova trattazione delle multigrade.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce).

**Sunto** - *Riportiamo in questa Nota i più importanti risultati relativi alle multigrade sotto forma nuova che rende facilissime molte dimostrazioni. Accenneremo poi a delle curiosità numeriche ed a delle interessanti applicazioni delle multigrade.*

## CAP. I.
## I TEOREMI FONDAMENTALI

**1.** Si dice *uguaglianza multigrada* o semplicemente *multigrada* la

(1) $$a_1, \ldots, a_p \overset{k}{=} b_1, \ldots, b_q; \qquad (k = m_1, \ldots, m_r),$$

che sta per il sistema

(2) $$\sum_{i=1}^{p} a_i^k = \sum_{i=1}^{q} b_i^k. \qquad \text{(id.)}$$

Si scrive poi

(3) $$a_1, \ldots, a_p \overset{r}{=} b_1, \ldots, b_q$$

invece di (2), quando è $m_i = i$ e la (3) vien detta di *grado* o di *ordine* **r**.

Per maggior concisione noi diciamo la (3) una $\overset{r}{=}$, oppure una $\overset{r}{=}(p)$, se $p \geq q$, ed inoltre scriviamo

$$a_1, \ldots, a_p \underset{d}{\overset{m}{=}} b_1, \ldots, b_q,$$

al posto della (1), se gli $m_i$ sono in progressione aritmetica con ragione $d$ essendo $m_1 \leq d$ il 1° termine ed $m_r = m$ l'ultimo. Così le

$$a_1, \dots, a_p \overset{2m}{\underset{2}{=}} b_1, \dots, b_q, \qquad a_1, \dots, a_p \overset{2m+1}{\underset{2}{=}} b_1, \dots, b_q,$$

stanno rispettivamente per le

$$a_1, \dots, a_p \overset{k}{=} b_1, \dots, b_q, \qquad a_1, \dots, a_p \overset{k}{=} b_1, \dots, b_q$$
$$(k = 2, 4, \dots, 2m) \qquad (k = 1, 3, \dots, 2m+1)$$

che hanno molta importanza nell'argomento che trattiamo.

Anche queste due ultime multigrade le indichiamo semplicemente con $\overset{n}{\underset{2}{=}}(p)$, se $p \geq q$; o con $\overset{n}{\underset{2}{=}}(p, q)$, ove $p > q$, se preme precisare il numero dei termini di ciascun membro (¹).

2. Ecco ora il teorema fondamentale di TARRY (²) d'immediata dimostrazione.

TEOR. 1° (di TARRY. - *Se è*

$$(4) \qquad a_1, \dots, a_p \overset{n}{=} b_1, \dots, b_p$$

*è anche*

$$(5) \qquad a_1, \dots, a_p, b_1 + h, \dots, b + h \overset{n+1}{=\!=} b_1, \dots, b_p, a_1 + h, \dots, a_p + h,$$

*ove* h *è un intero arbitrario, non nullo.*

3. Sostanzialmente identico al teor. di TARRY è il seguente dello ESCOTT (³):

(³) « Quart. Jour. Math. », (1910), pp. 141-67.

(¹) Primi esempi di multigrade si debbono a CHR. GOLDBACH, (una $\overset{2}{=}(4)$ parametrica, in una letteca ad EULERO del 18 luglio 1750), e ad EULERO (un'altra dello stesso tipo, in una lettera a GOLDBACH del 4 sett. 1751). L. E. DICKSON, nella sua *History of the theory of numbers*, 2ª ed., (1934), vol. 2°, dedica alle multigrade il cap. XXIV. Recentemente poi è stato compilato un lavoro da A. GLODEN in cui sono riportati i principali risultati relativi alle multigrade: Cfr. A. GLODEN, *Mehrgradige gleichungen*, 2ª ediz., (1944), Groningen, pp. 102. Estese notizie bibliografiche si trovano in A. GLODEN et G. PALAMA, *Bibliographie des multigrades avec quelques notices biographiques*, Lussemburgo (1948), pagg. V-64.

(²) « L'inter. des Math. », vol. 19, (1912), pp. 219-21. Cfr. inoltre BARBETTE, *Formation des identités à tous les degrès*, Congresso di Grenoble del 1925 dell'Ass. Franç. avac. sc.

TEOR. 2° (di ESCOTT). *Se* F(x), G(x) *sono due polinomi con coefficienti interi aventi i primi* r *termini uguali, allora* F(x)G(x + *h*) *e* G(x)F(x + h), *ove* h *è un intero non nullo qualsiasi, hanno invece uguali i loro primi* r + 1 *termini.*

**4.** Con il teor. di TARRY, largamente impiegato nelle multigrade, si possono stabilire agevolmente sistemi di identità del tipo

$$a_1^k + \dots + a_s^k = b_1^k + \dots + b_s^k, \quad \text{per } k = 1, 2, \dots, m, \tag{6}$$

qualunque sia $m$.

Aumentando $m$ però aumenta in generale $s$ nella (6). Difatti se la $\overset{1}{=}$ iniziale è una $\overset{1}{=}(p_1)$, le $\overset{i}{=}(p_i$, $(i = 2, 3, \dots, n)$, che si traggono con la successiva applicazione della (5), hanno in generale $p_i = 2^i p_1$, $(i = 2, 3, \dots, n)$.

La scelta opportuna di $h$ però nella (5) può ridurre il numero dei suoi termini talvolta notevolmente.

Per es. dalla

$$1,\ 5,\ 9,\ 17,\ 18 \overset{4}{=} 2,\ 3,\ 11,\ 15,\ 19 \tag{7}$$

con la (5) per $h = 4$, anzichè avere una $\overset{5}{=}(10)$, si ha la $\overset{5}{=}(6)$ che segue

$$1,\ 6,\ 7,\ 17,\ 18,\ 23 \overset{5}{=} 2;\ 3,\ 11,\ 13,\ 21,\ 22, \tag{8}$$

potendosi eliminare i termini 5, 9, 15, 19 comuni ai due membri di essa.

**5.** Nella (5) che è una $\overset{n+1}{=\!=\!=}(2p)$, si ha $2p$ minimo attribuendo ad $h$ il valore della differenza di maggior frequenza fra due termini sia del 1° che del 2° membro della (4).

Così fra tali differenze relative alla (7) che sono

$$4,\ \underline{\underline{8}},\ 16\ 17,\ \underline{4},\ 12,\ 13,\ \underline{\underline{8}},\ 9,\ 1;\quad 1,\ 9,\ 13,\ 17,\ \underline{\underline{8}},\ 12,\ 16,\ 4,\ \underline{\underline{8}},\ \underline{4},$$

si nota che quelle di maggior frequenza sono 4 e 8 e si è avuta la (8) assumendo appunto $h = 4$.

**6.** Ma in una $\overset{n}{=}(p)$ non può essere $p \leq n$. Infatti sussiste il se-

TEOR. 3° (di BASTIEN) (4). – *Se la* (4) *non è una multigrada banale, cioè se gli* $a_1$ *non sono una permutazione dei* $b_1$, *non può essere* p ≤ n.

(4) « Sphinx-Oedipe », vol. 8°, (1913), pp. 171-2.

Difatti se sono gli $a_i$, $b_i$ radici rispettivamente, delle

$$x^p + A_1 x^{p-1} + \dots + A_p = 0,$$
$$x^p + B_1 x^{p-1} + \dots + B_p = 0,$$

con le

$$S_j + A_1 S_{j-1} + \dots + A_{j-1} S_1 + j A_j = 0,$$
$$T_j + B_1 T_{j-1} + \dots + B_{j-1} T_1 + j B_j = 0,$$

ove

$$S_i = a_1{}^i + \dots + a_p{}^i, \qquad T_i = b_1{}^i + \dots + b_p{}^i,$$

per la (4), se fosse $p \leq n$, si ricaverebbe $A_i = B_i$, $(i = 1, 2, \dots, p)$, e gli $a_i$ sarebbero una permutazione dei $b_i$.

Una $\overset{n}{=}(p)$, in cui è $p = n + 1$, in cui cioè $p$ ha il minimo valore possibile, si dice una multigrada *normale*, (od *ideale*), dell'$n$-mo ordine.

Sono molto interessanti le $\overset{n}{=}(n+1)$.

**7.** La (5) applicata per es. alla

$$1,\ 9 \overset{1}{=} 4,\ 6$$

dà successivamente per

$h = 2$ $$1,\ 8,\ 9 \overset{2}{=} 3,\ 4,\ 11$$

$h = 1$ $$1,\ 5\ 8\ 12 \overset{3}{=} 2,\ 3,\ 10,\ 11$$

$h = 7$ $$1,\ 5,\ 9,\ 17,\ 18 \overset{4}{=} 2,\ 3,\ 11,\ 15,\ 19$$

$h = 8$ $$1,\ 5,\ 10,\ 18,\ 23,\ 27 \overset{5}{=} 2,\ 3,\ 13,\ 15,\ 25,\ 26$$

$h = 13$ $$1,\ 5,\ 10,\ 16,\ 27,\ 28,\ 38,\ 39 \overset{6}{=} 2,\ 3,\ 13,\ 14,\ 25,\ 31,\ 36,\ 40$$

$h = 11$ $$1,\ 5,\ 10,\ 24,\ 28,\ 42,\ 47,\ 51 \overset{7}{=} 2,\ 3,\ 12,\ 21,\ 31,\ 40,\ 49,\ 50$$

È notevole questo esempio, perchè delle precedenti ben cinque sono normali.

Si conoscono $\overset{n}{=}(n+1)$ per $n \leq 9$, parametriche per $n \leq 7$, numeriche due per $n = 8$, una soltanto per $n = 9$.

Per $n \geq 10$ il $p$ minimo delle $\overset{n}{=}(p)$ stabilite si desume dalla seguente tabella.

| $n$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 14* | 15* | 16* | 17* | 18* | 19* | 20* | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 14 | 14 | 20 | 30 | 30 | 30 | 38 | 48 | 58 | 58 | 65 | 86 | 100 | $< 200$ | $< 400$ | $< 800$ |

I risultati relativi ai valori di $n$ segnati con asterisco sono del sig. GUPTA [5].

Sono state date inoltre dal sig. DORWART [6] delle successioni di multigrade dette « sequenze » del tipo $\overset{i}{=}(i+1)$, $(i=n,\ n+1, \ldots)$, a mezzo dell'applicazione ripetuta del teor. di TARRY. Le $\overset{i}{=}(i+1)$, $(i=1, 2, 3, 4, 5)$, del n. 7 costituiscono appunto un esempio di tali seguenze.

**8.** Si noti che negli esempi di $\overset{n}{=}(p)$ riportate in alto è

(9) $$a_i + a_{p+1-i} = b_i + b_{p+1-i} = \text{costante}, \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \frac{p}{2}\right)$$

se $n$ è dispari; e

(10) $$a_i + b_{p+1-i} = \text{costante}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

se $n$ è pari.

Però vi sono multigrade in cui ciò non si verifica. Eccone per es. alcune

(11) $$1, 6, 9 \overset{2}{=} 3, 3, 10$$
$$1, 10, 12, 23 \overset{3}{=} 3, 5, 16, 22$$
$$1, 10, 14, 27, 33 \overset{4}{=} 3, 5, 21, 22, 34.$$

Le (4) che soddisfano a (9) od a (10), a seconda della parità di $n$, si dicono *autocomplementari*, (o *simmetriche*). Sotto alcuni aspetti sono notevoli le $\overset{n}{=}(p)$ non autocomplementari, e sotto altri invece le autocomplementari come si vedrà in seguito.

Esempi di $\overset{n}{=}(n+1)$ non autocomplementari si conoscono soltanto per $n \leq 5$, e sono rarissimi gli esempi noti di $\overset{n}{=}(p)$ non autocomplementari per $n > 5$, con $p$ sufficientemente piccolo [7].

**9.** Notiamo ora il seguente utile

TEOR. 4° (di FROLOV [8]). – *Se vale la* (4), *vale anche la*

(12) $$Aa_1 + B, \ldots, Aa_p + B \overset{n}{=} Ab_1 + B, \ldots, Ab_p + B,$$

*se* A *e* B *sono due interi arbitrari.*

[5] Cfr. H. GUPTA, *On sums of powers*. « Indian Ac. of Sc. », 4, (1936), pp. 571-4.

[6] Cfr. H. L. DORWART, *Sequences of ideal solutions in the Tarry-Escott problem*, « Bull. of the Americ. Math. Soc. », vol. 53, n. 4, (1947), pp. 381-91.

[7] Noi perciò abbiamo proposto in « Intern. Recherches Math », fasc. 11°, (1947), p. 76, la ricerca di tali multigrade non autocomplementari normali o con $p$ sufficientemente piccolo.

[8] « Bull. Soc. Math. de France », vol. 17°, (1888-9), pp. 69-83; vol. 20°, (1892), pp. 69-84.

La (4) e la (12) si dicono fra loro *equivalenti*. Due multigrade equivalenti si ritengono non distinte. Si stabiliscono agevolmente criteri per riconoscere se due $\overset{n}{=}(p)$ sono o no fra loro equivalenti.

Si dimostrano assai agevolmente vari teoremi (⁹) relativi ad una $\overset{n}{=}(p)$ autocomplementare applicando la (12) per $A = 1$, $B = -\frac{c}{2}$, se $c$ è il valore della costante delle (9), (10). Pertanto è opportuno scrivere una $\overset{n}{=}(p)$ autocomplementare oltre che con i termini tutti positivi e con il minore uguale ad 1, come solitamente si fa applicando, se necessario, la (12), anche con i termini diminuiti di $\frac{c}{2}$. Allora la (4) assume uno dei due aspetti seguenti

$$-a_1, \dots, -a_r, a_1, \dots, a_r \overset{n}{=} -b_1, \dots, -b_r, b_1, \dots, b_r$$

se $p = 2r$ ed $n$ è dispari;

$$a_1, \dots, a_p \overset{n}{=} -a_1, \dots, -a_p$$

se $n$ è pari;
la prima delle quali è meglio scriverla così

$$\pm a_1, \dots, \pm a_r \overset{n}{=} \pm b_1, \dots, \pm b_r, \tag{4'}$$

od anche

$$\pm(a_1, \dots, a_r) \overset{n}{=} \pm(b_1, \dots, b_r).$$

In generale si dice che la (4) è sotto forma ridotta se $\Sigma a_i = \Sigma b_i = 0$ e se $(a_i, b_i) = 1$. Per es. una autocomplementare sotto forma ridotta, se $n$ è dispari assume l'aspetto di (4'). Due $\overset{n}{=}(p)$ che hanno una stessa forma ridotta sono equivalenti.

**10.** Ecco ora un nostro teorema (¹⁰) analogo a quello di TARRY.

TEOR. 5°. - *Se vale la* (4), *vale anche, se* k *è un intero arbitrario*

a) *la*

$$a_1, \dots, a_p, k - b_1, \dots, k - b_p \overset{n+1}{=\!=\!=} b_1, \dots, b_p, k - a_1, \dots, k - a_p,$$

*se* n *è dispari;*

(⁹) Cfr. PALAMÀ, *Un teorema analogo a quello di Tarry. Osservazioni su altri noti. Applicazioni*, « Atti Sem. Mat. e Fis. di Modena ». vol. II, (1947-8); *Generalizzazione di due teoremi sulle uguaglianze multigrade, su delle trasformazioni di esse e sulle multigrade a catena*, « Rend. di Mat. e delle sue Applicazioni », fasc 1°, (1947); *Teoremi relativi alle uguaglianze multigrade*, cfr. questi stessi Rend., fasc. III-IV, (1947).

(¹⁰) Cfr. G. PALAMÀ, *Un teorema analogo* ecc., c. in (⁹).

b) *la*

$$a_1, \dots, a_p, k - a_1, k - a_p \overset{n+1}{=\!=} b_1, \dots, b_p, k - b_1, \dots, k - b_p,$$

*se* n *è pari.*

Esso si dimostra subito. Anche ora scegliendo opportunamente il valore di $k$ si ha il più piccolo possibile numero di termini.

Se la (4) è autocomplementare i teor. 1° e 5° danno la stessa $\overset{n+1}{=\!=}$. Per provarlo basta mettere sotto forma ridotta la (4) e poi applicare il teor. 5°. Ma quei teor., se la (4) non è autocomplementare, danno risultati differenti ed in numerosi esempi si sono avute delle $\overset{n+1}{=\!=}$ più interessanti con il teor. 5° che con il 1°.

Per es. dalla non autocomplementare (16) il teor. 5° dà ben cinque $\overset{3}{=}(4)$; mentre le $\overset{3}{=}(p)$, con il $p$ minimo, che si traggono dalla (16), con la (5), hanno $p = 5$.

Vedremo fra breve altri teoremi che richiedono per la loro applicazione $\overset{n}{=}$ non autocomplementari.

## Cap. II.

## ALCUNI ALTRI TEOREMI NOTEVOLI

1. Le $\overset{n}{=}$ autocomplementari danno subito delle $\overset{n-1}{\underset{2}{=\!=}}$, difatti scritta la $\overset{n}{=}$ nella sua forma ridotta da essa si ricava:

*a*) se $n = 2m$

$$2a_1, \dots, 2a_p \overset{2m-1}{\underset{2}{=\!=}} 0,$$

cioè

$$a_1, \dots, a_p \overset{2m-1}{\underset{2}{=\!=}} 0:$$

*b*) se $n = 2m + 1$, $p = 2r$

$$2a_1, \dots, 2a_r \overset{2m}{\underset{2}{=}} 2b_1, \dots, 2b_r,$$

ossia

$$a_1, \dots, a_r \overset{2m}{\underset{2}{=}} b_1, \dots, b_r;$$

sussiste quindi il

Teor 1° [11]. - *Dalle autocomplementari, con* c *quale valore della costante*

$$a_1, \dots, a_p \overset{2m}{=} b_1, \dots, b_p.$$

$$a_1, \dots, a_r \overset{2m+1}{=\!=} b_1, \dots, b_r, \qquad p = 2r)$$

[11] Cfr. G. Palama, *Teoremi relativi ecc.*, c. in [9].

*si ricava rispettivamente*

$$A_1, \dots, A_p \overset{2m-1}{\underset{2}{=}} 0, \quad \text{essendo} \quad A_i = a_i - \frac{c}{2}, \quad (i = 1, \dots, p),$$

$$A_1, \dots, A_r \overset{2m}{\underset{2}{=}} B_1, \dots, B_r, \quad \text{ove} \quad A_i = a_i - \frac{c}{2}, \; B_i = b_i - \frac{c}{2}, \quad (i = 1, \dots, r).$$

*Applicazione numerica.* - Le $\overset{6}{=}$, $\overset{7}{=}$ del n. 7 del Cap. 1°, scritte sotto forma ridotta, danno rispettivamente

$$-39, -31, -21, -9, 13, 15, 35, 37 \overset{6}{=} -37, -35, -15, -13\ 9, 21, 31, 39,$$

$$\pm 25, \pm 21, \pm 16, \pm 2 \overset{7}{=} \pm 24, \pm 23, \pm 14, \pm 5,$$

dalle quali si ha perciò rispettivamente

$$13, 15, 35, 37 \overset{5}{\underset{2}{=}} 9, 21, 31, 39,$$

$$2, 16, 21, 25 \overset{6}{\underset{2}{=}} 5, 14, 23, 24.$$

**2.** Notevole è anche il seguente teorema inverso del precedente [12] di facile dimostrazione.

TEOR. 2°. - *Se è*

$$a_1, \dots, a_p \overset{n}{\underset{2}{=}} b_1, \dots, b_q,$$

*è anche, se* t *è un numero arbitrario*:

a) *se* n *è pari e* q = p

$$\pm a_1 + t, \dots, \pm a_p + t \overset{n+1}{=} \pm b_1 + t, \dots, \pm b_p + t;$$

b) *se* n *è dispari*

$$a_1 + t, \dots, a_p + t, -b_1 + t, \dots - b_q + t \overset{n+1}{=} b_1 + t, \dots, b_q + t, -a_1 + t, \dots, -a_p + t.$$

Da questo teorema e da quello di BASTIEN segue che *in una* $\frac{n}{2}$(p) *qualunque sia la parità di* n, *non può essere* $p \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ *senza che la* $\frac{n}{2}(p)$, *sia banale.*

**3.** Per l'applicazione del teor. 2° sono necessarie delle $\overset{n}{\underset{2}{=}}$ stabilite indipendentemente dal teorema di TARRY. Sono perciò utili per es. i due seguenti teoremi [13]:

[12] Cfr. A. GLODEN, c. in [1], pp. 21-3.

[13] Idem., pp 44-6 cui rimandiamo anche per le dimostrazioni.

TEOR. 3° (di BIRCK). – *Se è*

(13) $$a_1,\ a_2,\ a_3 \overset{4}{\underset{2}{=}} b_1,\ b_2,\ b_3,$$

*è anche, purchè sia*

(14) $$a_3 \neq \pm (a_1 + a_2), \qquad b_3 \neq \pm (b_1 + b_2).$$

$$a_1 + a_2 + a_3,\ -a_1 + a_2 + a_3,\ a_1 - a_2 + a_3,\ a_1 + a_2 - a_3,\ 2b_1,\ 2b_2,\ 2b_3 \overset{x}{=}$$
$$b_1 + b_2 + b_3,\ -b_1 + b_2 + b_3,\ b_1 - b_2 + b_3,\ b_1 + b_2 - b_3,\ 2a_1,\ 2a_2,\ 2a_3,$$
$$(x = 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8).$$

TEOR. 4° (di GLODEN). - *Se valgono le* (13), (14) *ed è inoltre*

(15) $$a_1 + a_2 - a_3 = 2(b_1 + b_2 - b_3) = 4h,$$

*è anche*

(16) $$2a_1 - 3h,\ 2a_1 - h,\ 2a_2 - 3h,\ 2a_2 - h,\ 2a_3 + h \overset{7}{\underset{2}{=}}$$
$$2b_1 - h,\ 2b_2 - h,\ 2a_3 + h,\ 2a_3 + 3h,\ 3h.$$

Questi teoremi non sono però indipendenti. Noi difatti abbiamo per es. dedotto dal teorema di BIRCK quello di GLODEN ed altri ad esso analoghi ([14]), a mezzo del teorema inverso di quello di TARRY ([15]).

4. *Applicazione numerica.* – Per es. dalla

(17) $$20,\ 37,\ 21 \overset{4}{\underset{2}{=}} 12,\ 35,\ 29,$$

essendo soddisfatta la (15) avendosi

$$20 + 37 - 21 = 2 \times (12 + 35 - 29) = 4 \times 9$$

con la (16), si ha

$$13,\ 31,\ 47,\ 65,\ 67 \overset{7}{\underset{2}{=}} 15,\ 27,\ 51,\ 61,\ 69.$$

La stessa (17), per il teorema di BIRCK, dà invece la

$$2,\ 12,\ 18,\ 19,\ 29,\ 35,\ 39 \overset{x}{=} 3,\ 9,\ 20,\ 21,\ 26,\ 37,\ 38$$
$$(x = 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8).$$

([14]) Cfr. G. PALAMÀ, *Un teorema analogo ecc.*, c. in ([9]).

([15]) Cfr. ID., *Teoremi relativi ecc.*, c. in ([9]). Per avere $\overset{4}{\underset{2}{=}}$ che occorrono per l'applicazioni dei teor. di BIRCK e di GLODEN, cfr. per es. G. PALAMÀ, *Metodi per avere soluzioni parametriche della* $a_1, \ldots, a_p \overset{2,4}{=} b_1, \ldots, b_p$ *nei casi* $p = 3$, $p = 4$. « Rend. Mat. e delle sue Applic. », fasc. 1° (1947).

**5.** Due teoremi interessanti sono ancora i seguenti di facile dimostrazione

TEOR. 5° (16). – *Se vale la* (4), *in cui* p *ha un valore arbitrario maggiore di* n, *vale anche*:

a) *la*

$$a_1, \dots, a_p, k - b_1, \dots, k - b_p \overset{n+3}{=\!=} b_1, \dots, b_p, k - a_1, \dots, k - a_p,$$

*se* n *è dispari*;

b) *la*

$$a_1, \dots, a_p, k - a_1, \dots, k - a_p \overset{n+3}{=\!=} b_1, \dots, b_p, k - b_1, \dots, k - b_p,$$

*se* n *è pari*;

*quando in entrambi i casi si fa*

$$k = \frac{2(T_{n+2} - S_{n+2})}{(n+2)(T_{n+1} - S_{n+1})} \tag{18}$$

*in cui si è posto*

$$T_i = b_1^i + \dots + b_p^i, \qquad S_i = a_1^i + \dots + a_p^i.$$

È notevole questo teorema, perchè si passa da una $\overset{n}{=}(p)$ direttamente ad una $\overset{n+3}{=\!=}(2p)$, qualunque sia $p > n$. però la sua applicazione richiede una $\overset{n}{=}(p)$ non autocomplementare, altrimenti si ottiene una $\overset{n+3}{=\!=}(2p)$ banale.

Difatti se la (4) è autocomplementare, scritta essa nella sua forma ridotta dalla (18), risultando $T_{n+2} - S_{n+2} = 0$ qualunque sia la parità di $n$, si ha $k = 0$ e quindi il teorema precedente dà:

$$\pm a_1, \dots, \pm a_r, \mp b_1, \dots, \mp b_r \overset{n+3}{=\!=} \pm b_1, \dots, \pm b_r, \mp a_1, \dots, \pm a_r$$

se $n$ è dispari;

$$a_1, \dots, a_p, -a_1, \dots, -a_p \overset{n+3}{=\!=} -a_1, \dots, -a_p, a_1, \dots, a_p$$

se $n$ è pari,

che sono appunto banali.

Il passare da una $\overset{n}{=}(p)$ ad un'altra equivalente non infirma il risultato ultimo, come è ovvio. Difatti a mezzo della (18) si dimostra che se dalla (4) con il teor. 5° si ha la

$$A_1, \dots, A_{2p} \overset{n+3}{=\!=} B_1, \dots, B_{2p}, \tag{19}$$

(16) Cfr. G. PALAMÀ, *Generalizzazione ecc.*, c. in (9), e A. GLODEN, *Two Theorems on multi-degree equalities*, « Amer. Math. Mont. », vol. LIII, n. 4, aprile (1946), pp. 205-6.

lo stesso teorema applicato alla

$$a_1 + t, \dots, a_p + t \overset{n}{=} b_1 + t, \dots, b_p + t,$$

dà invece la

$$A_1 + t, \dots, A_{2p} + t \overset{n+3}{=\!=\!=} B_1 + t, \dots, B_{2p} + t$$

che è equivalente alla (19).

**6.** Sono da notarsi i casi $p = n + 1$, $p = n + 2$, perchè in entrambi, si ha dalla (18)

$$k = \frac{2S_1}{n+1},$$

purchè sia in più nel 2°.

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_{n+2} = b_1 \cdot b_2 \dots b_{n+2}.$$

Sotto queste due ultime forme il teorema però era già noto ([17]).

**7.** Teor. 6° (di Goormaghtigh ([18])). – *Se vale la* (4), *vale anche la*

$$(20) \qquad a_1 + u, \dots, a_p + u \overset{x}{=} b_1 + u, \dots, b_p + u, \quad (x = 1, 2, \dots, n, n+2),$$

*purchè si faccia*

$$u = -\frac{k}{2},$$

*essendo* k *dato dalla* (18).

Si noti anche questa volta il caso $p = n + 1$, in cui risulta $u = -\dfrac{S_1}{n+1}$.

Se la (4) è autocomplementare risulta $u = 0$ e quindi la (20) dà

$$\pm a_1, \dots, \pm a_r \overset{k}{=} \pm b_1, \dots, \pm b_r, \quad (k = 1, 2, \dots, n, n+2),$$

se $n$ è dispari; e

$$a_1, \dots, a_p \overset{a}{=} -a_1, \dots, -a_p \qquad \text{id.}$$

se $n$ è pari;
che sono del tutto ovvie.

Si dimostra subito anche ora che il teorema di Goormaghtigh dà la stessa mutigrada finale se si applica a due $\overset{n}{=}(p)$ fra loro equivalenti.

L'applicazione dei teor. 5° e 6° è più agevole se la $\overset{n}{=}$ è sotto

([17]) Cfr. A. Gloden, c. in ([1]), pp. 26-9. Il caso $p = n + 1$ era stato stabilito da A. Gloden, « Gazeta Mat. », (1940), pp. 198-200.

([18]) *Sphinx-Oedipe*, (1939), pp. 54-55.

forma ridotta. Così se la (4) è sotto forma ridotta ed è normale essa senz'altro sussiste per i valori 1, 2, ..., $n$, $n+2$ dell'esponente, perchè essendo $S_1 = 0$, è anche $u = 0$.

## Cap. 3.

## CURIOSITÀ NUMERICHE — APPLICAZIONI

**1.** *Curiosità numeriche.* – E. Cesaro [19] trovò che i primi 9 numeri della serie naturale soddisfano alla

$$2,\ 4,\ 9,\ 5 \overset{2}{=} 5,\ 1,\ 6,\ 8 \overset{2}{=} 8,\ 3,\ 7,\ 2$$

in cui sono ripetuti soltanto i numeri 2, 5, 8; mentre E. Prouhet [20] notò che 1, 2, ..., 27, possono essere separati in tre gruppi che soddisfano alla

$$1,\ 6,\ 8,\ 12,\ 14,\ 16,\ 20,\ 22,\ 27 \overset{2}{=} 2,\ 4,\ 9,\ 10,\ 15,\ 17,\ 21,\ 23,\ 25 \overset{2}{=}$$
$$\overset{2}{=} 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 18,\ 19,\ 24,\ 26.$$

Quest'ultimo Autore affermò inoltre che in generale ci sono $n^m$ numeri separabili in $n$ gruppi di $n^{m-1}$ termini tali che la somma delle loro $k$-me potenze è lo stessa per tutti i gruppi, se $k < m$.

Un risultato analogo fu stabilito da E. N. Barisien [21] il quale trovò che 1, 2, ..., 32 soddisfano alla

$$1,\ 8,\ 10,\ 15,\ 20,\ 21,\ 27,\ 30 \overset{2}{=} 2,\ 7,\ 9,\ 16,\ 19,\ 22,\ 28,\ 29 \overset{2}{=}$$
$$\overset{2}{=} 3,\ 6,\ 12,\ 13,\ 18,\ 23,\ 25,\ 32 \overset{2}{=} 4,\ 5,\ 11,\ 14,\ 17,\ 24,\ 26,\ 31.$$

G. Tarry [22] stabilì invece che i primi $2^n(2a+1)$ interi possono essere separati in due gruppi di $2^{n-1}(2a+1)$ interi le cui somme delle $t$-me potenze per $t = 1, \ldots, n$ sono fra loro uguali. Per $a = 1$, $n = 3$, si ha

$$1,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 14,\ 16,\ 17,\ 18,\ 22,\ 24 \overset{3}{=} 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 13,\ 15,\ 19,\ 20,\ 21,\ 23,$$

in cui vi sono appunti tutti i numeri 1, 2, ..., 24 senza alcuna ripetizione.

E. Miot [23] generalizzando il precedente risultato notò che

[19] « Nouv. Corr. Math. », 4, (1878), pp. 293-5. Domanda di F. Proth.

[20] « Comptes Rendus », Paris, 33, (1851), p. 225.

[21] « Mathesis », (4), vol. 1°, (1911), p. 69.

[22] « L'Inter. des Math. », vol. 19°, (1912), p. 200.

[23] Id., vol. 20°, (1913), pp. 64-5. Cfr. inoltre G. Palamà, *Somma termine a termine e sequenze di multigrade-Multigrade a catena-Applicazioni*

$2^n(2a+1)$ qualsiasi numeri in progressione aritmetica possono essere separati in due gruppi aventi per $t=1,\dots,n$. se $a=0$, $n>1$; per $t=1,\dots,n-1$, se $a=0$. Questa generalizzazione segue immediatamente dal precedente caso per la (12).

Infine sono state notate delle $\stackrel{2}{=}$ in quadrati magici ([24]). Per es. nel seguente

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

che si trova in un quadro rappresentante la « *Malinconia* » di A. Dürer, i numeri delle righe $1^a$ e $4^a$; $2^a$ e $3^a$; e delle colonne $1^a$ e $4^a$; $2^a$ e $3^a$, sono appunto termini di $\stackrel{2}{=}(4)$, avendosi ad es.

$$16,\ 3,\ 2,\ 13 \stackrel{2}{=} 4,\ 15,\ 14,\ 1.$$

2. *Applicazione delle multigrade al problema di Waring* ([25]). - Le multigrade danno un contributo al problema di Waring.

di prossima pubblicazione negli « Atti del Sem. Mat. Fis. dell'Univ. di Modena », ove sono indicati tutti i modi in cui in alcuni casi i primi interi della serie naturale possono ripartirsi negli elementi di una multigrada a catena. Ricordiamo che si dice *multigrada a catena* la

$$a_{1,1},\dots,a_{1,p} \stackrel{n}{=} a_{2,1},\dots,a_{2,p} \stackrel{n}{=} \dots \stackrel{n}{=} a_{r,1},\dots,a_{r,p}$$

di ovvio significato e che ciascun membro di essa si dice un *elemento* della multigrada a catena. Cfr. anche l. c. in ([8]).

([24]) Cer. A. Moessner, « The Tôhoku Math. Jour. », marzo 1937, e J. L. Burchnall and T. W. Chaundy, *a type of magic square in* Tarry's *problem*, « Quart. Jour. Math. », vol. 8, (1937), pp. 119-30. Diverse altre notizie, bibliografiche, si trovano per es. in A. Aubry, *G. Tarry et les carrés, magiques*, « Congrès As. Fr. av. Sc. di Grenoble » del 1925.

([25]) Cfr. Dickson, c. in ([1]), pp. 717-29 in cui vi sono notizie relative al problema di Waring aggiornate soltanto però sino al 1920. Ma del problema vi è un'estesa interessante bibliografia posteriore anche a tale data. Particolare contributo a questo problema a mezzo delle multigrade è stato dato da *E.* M. Wright. Cfr. per es. di questo Autore: *On sums of* k — th *powers*, « Jour. of the Math. Soc. », vol. 10, (1935), pp. 94-9; *On Tarry's problem* (I), « Quart. Jour. Math. » Oxford Series, vol. 6°, n. 24, (1935), pp. 261-7; (II), id., vol. 7°, n. 25, (1936), pp. 43-5; (III), id., vol. (8°), n. 29, pp. 48-50.

Difatti per es. dalla

$$13,\ 31,\ 47,\ 65,\ 67 \overset{7}{=} 15,\ 27,\ 51,\ 61,\ 69,$$

(che si ricava applicando alla $\overset{7}{=}$ (8) del n. 7 del Cap. 1° la (5) per $h = 19$ e poi il teor. 2° del Cap. 2°), avendosi

$$13^7 + 31^7 + 47^7 + 65^7 + 67^7 = 15^7 + 27^7 + 51^7 + 61^7 + 69^7,$$

si ha anche

$$13^7 + 31^7 + 47^6 + 65^7 + 67^7 + N^7 = 15^7 + 17^7 + 51^7 + 61^7 + 69^7 + N^7,$$

se $N$ è intero positivo arbitrario. Pertanto esistono infiniti numeri che sono rappresentabili in due modi come somme di sei 7–me potenze.

Perciò a mezzo della tabella del n. 7 del Cap. 1° e del teor. 1° del Cap. 2° si giustifica subito la seguente tabella in cui è riassunto il contributo dato dalle multigrade al problema dell'esistenza di infiniti numeri rappresentabili come somme di $m$ potenze $p$–me.

| $p$ | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | $21+r,\ (r=1,\ ,\ldots)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 6 | 6 | 8 | 8 | 12 | 16 | 17 | 16 | 20 | 25 | 31 | 30 | 34 | 44 | 51 | $< 2^r \times 50 + 1$ |

si noti che per $p = 11,\ 13,\ 17$ non si ha $m = 11,\ 16,\ 30$, perchè le corrispondenti $\overset{n}{=}$ (sono delle $\overset{11}{=}(11,\ 9)$, $\overset{13}{=}(16,\ 14)$, $\overset{17}{=}(30,\ 28)$ rispettivamente.

**3.** *Applicazione delle* $\overset{n}{=}(n+1$ *al calcolo dei logaritmi.* – È notissima la serie

$$\log \frac{M}{N} = 2\left(k + \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{5}k^5 + \ldots\right) \log e, \tag{21}$$

in cui è $k = \dfrac{M - N}{M + N}$, ed $e$ è la base dei logaritmi neperiani.

Le $\overset{n}{=}(n+1)$ forniscono il mezzo di rendere facile il calcolo dei logaritmi a mezzo della (21) che ne è resa rapidamente convergente.

Basta costruirsi, a mezzo del teorema di ESCOTT, i polinomi $M$ ed $N$ di ugual grado, aventi interi gli zeri e differenti soltanto per una costante che conviene che sia la minima possibile.

Così per es. DELAMBRE [26] prese

$$M = x^3 + pq + q, \qquad N = x^3 + px - q,$$

con gli zeri $a$, $b$, $-a-b$, $-a$, $-b$, $a+b$ soddisfacenti appunto ad

$$a,\ b,\ -a-b \overset{2}{=} -a,\ -b,\ a+b.$$

Per $p=3$, $q=2$, (valori considerati da BORDA), e ad es. per $x = 28898$ [27], abbiamo a mezzo della (21)

$$2 \log 75 = \log \left( \frac{2^3 \times 3^5 \times 7 \times 13^4\, 19^2 \times 43}{5^4 \times 11^2 \times 17^2 \times 37^2} \right) +$$
$$+ 2 \times \left( \frac{1}{26066279000049} + \dots \right) \log e.$$

Ora, del primo termine della serie, $\frac{1}{26066279000049}$, uguale a 0,00000000000003..., si può prescindere se si richiede log 71 con 13 cifre decimali esatte.

ESCOTT ha dimostrato che si può calcolare log 43867, (il numero primo 43867 è un fattore del 9° numero di BERNOULLI), con 72 cifre decimali esatte, usando il 1° termine soltanto della serie ottenuta con due polinomi di 6° grado.

4. *L'unità come radice multipla di certe equazioni.* – Le $\overset{n}{=}(n+1)$ consentono di vedere se le equazioni del tipo

$$x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_p} - x^{b_1} - x^{b_2} - \dots - x^{b_q} = 0$$

ammettono l'unità come radice multipla.

Per es. si ha facilmente che l'unità è radice quadrupla della

$$(22) \qquad f(x) \equiv x^{12} + x^8 + x^5 + x - x^{11} - x^{10} - x^3 - x^2 = 0,$$

dovendo essere

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0,$$

se vale, come vale difatti, la

$$(23) \qquad 1,\ 5,\ 8,\ 12 \overset{3}{=} 2,\ 3,\ 10,\ 11,$$

i cui termini sono gli esponenti della (22).

Sussiste una proposizione generale del tutto ovvia e la sua inversa.

[26] Cfr. *Tables trigonométriques décimales et tables de logarithmes par* J. C. BORDA, *augmentées et publiées par* DELAMBRE, Paris, an IX, (1800-1). Introduction.

[27] Cfr. ESCOTT, « Quart. Jour. Math. », (1910), pp. 141-57.

**5.** *Riducibilità di alcuni polinomi.* – H. L. DORWART ed OYSTEIN-ORE ([28]) hanno dimostrato che il polinomio

$$f(x) \equiv a(x-x_1)\dots(x-x_n) \pm p, \tag{24}$$

con $x_i \neq x_j$ e $p$ primo è irriducibile per $n \geq 6$ se $n$ è dispari, e che si possono avere soltanto due fattori di grado $\frac{n}{2}$ se $n$ è pari.

Inoltre H. L. DORWART ([29]) ha dimostrato che le condizioni per la riducibilità di (24) sono in sostanza equivalenti al problema della ricerca di una $\overset{n}{=}(n+1)$.

Per es. la (23) dà

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-8)(x-10)(x-11)(x-12)+179 =$$
$$= [x-1)(x-5)(x-8)(x-12)+179]\cdot[x-2)(x-3)(x-10)(x-11)-179].$$

**6.** *Polinomio di grado* n *che assumono* 2n *volte il valore* $\pm N$. – Un polinomio di grado $n$ non può assumere più di $n$ volte un valore $+N$, perchè tale polinomio assuma anche $n$ volta il valore opposto $-N$, H. L. DORWART ([30]), ha dimostrato che occorre costruire tali polinomi, avvalendosi delle $\overset{n}{=}(n+1)$, come si vede nel seguente esempio ottenuto a mezzo della (23). Il polinomio

$$(x-1)(x-5)(x-8)(x-12)+(x-2)(x-3)(x-10)(x-11),$$

assume 4 volte il valore 180 e pure 4 volte il valore $-180$.

**7.** Le multigrade sono state altresì applicate al calcolo di $\pi$ ([31]) ed alle equazioni funzionali ([32]).

([28]) « Ann. of Math. », vol. 34, (1933), p. 81.
([29]) « Duke Math. Jour. », vol. 1°, (1935), pp. 70-3.
([30]) Idem.
([31]) Cfr. DICKSON, c. in ([1]), p. 716.
([32]) Cfr. J. GRANT, « Amer. Math. Montly », vol. 37, (1930), p. 77.