Bollettino
Unione Matematica Italiana

Ubaldo Richard

Il problema di Apollonio e la teoria delle coniche omologiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 259–263.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_259_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Il problema di Apollonio e la teoria delle coniche omologiche.

Nota di UBALDO RICHARD (a Torino).

Sunto. - *Si dimostra come il classico problema di Apollonio (determinazione dei cerchi tangenti a tre cerchi dati) ammetta una semplice soluzione grafica fondata sulla nozione di coniche omologiche.*

In alcune note apparse recentemente sul « Periodico di Matematiche » (1), CESARINA TIBILETTI ha esposto una soluzione originale del problema di APOLLONIO e una veduta d'insieme delle soluzioni classiche, modernamente rielaborate. La lettura di questi lavori mi ha suggerito di rendere nota un'altra soluzione, essenzialmente proiettiva, dell'antico problema.

(1) CESARINA TIBILETTI: *Sul problema di Apollonio*, « Periodico di Matematiche », serie IV, v. XXIV (1946), pp. 20-39, pp. 100-111, pp. 152-161; v. XXV (1947), pp. 16-29. Per la bibliografia si veda l'articolo di B. COLOMBO: *Sistemi lineari di cerchi e sfere*, « Enciclopedia delle Mat. elem. », Milano, Hoepli, 1938, v II, parte I, p. 353.

2. È noto che due coniche reali si corrispondono in una o più omologie reali; asse di omologia è sempre una retta congiungente due punti comuni (reali o no) alle coniche date, centro di omologia è sempre l'intersezione di due tangenti comuni ([2]).

Dati due cerchi reali, saranno assi di omologie reali che mutino un cerchio nell'altro soltanto l'asse radicale e la retta impropria; centri di omologie reali saranno quei punti d'incontro di due tangenti comuni rispetto alle quali i due cerchi stiano in un medesimo angolo completo. Due cerchi reali si corrispondono quindi in quattro omologie reali, di cui due omotetie e due omologie ad asse (radicale) generalmente proprio; i centri di omotetia coincidono coi centri di omologia. Detti S ed $\bar{S}$ i centri di omotetia diretta e inversa, si verifica che l'omologia di centro S coincide (sui cerchi) con un'inversione per raggi reciproci che trasforma un cerchio nell'altro; quella di centro $\bar{S}$ coincide (sempre solo sui cerchi) col prodotto di un'inversione per una simmetria, entrambe di centro $\bar{S}$. Ne segue che punti corrispondenti in una delle nostre omologie sono punti di contatto di un cerchio tangente ai due cerchi dati e viceversa.

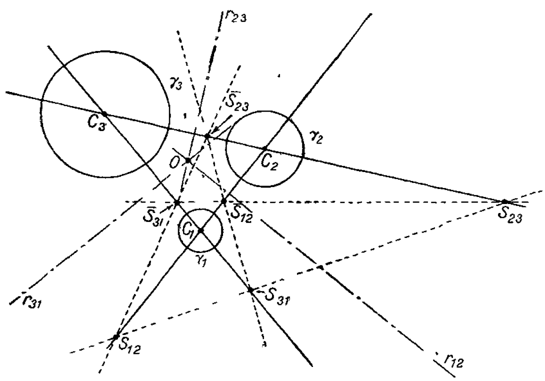

Fig. 1

Consideriamo ora tre cerchi reali generici in un piano. A due a due individuano sei omologie ad asse radicale che mutano un cerchio nell'altro; i sei centri di omologia sono vertici di un quadrilatero completo ([3]) di cui i centri dei cerchi dati costituiscono il triangolo diagonale (fig. 1).

([2]) G. Fano: *Complementi di Geometria.* cap. I, p. 21 (Torino, 1935, litografie).

([3]) Tale è infatti la configurazione dei centri di omotetia con cui i sei centri di omologia coincidono. A differenza dell'insieme delle sei omotetie, Poichè un cerchio tangente ai tre cerchi dati γ_1, γ_2. γ_3, ha i punti di contatto a due a due corrispondenti in tre delle omologie suddette, il prodotto Ω di tre omologie opportunamente scelte che mutino rispettivamente γ_1 in γ_2, γ_2 in γ_3, γ_3 in γ_1, subordina sul primo cerchio una proiettività π i cui elementi uniti sono i punti di contatto con γ_1 di due cerchi tangenti a γ_1, γ_2, γ_3.

La scelta delle omologie fattori può farsi a priori in otto modi, ma soltanto scegliendone i centri allineati ([4]) si giunge al problema. Ciò può farsi in quattro modi, e il problema di APOLLONIO si riconduce così a quattro problemi di secondo grado, come è ben noto.

La costruzione della proiettività π su γ_1 richiama in modo evidente il metodo di falsa posizione (fig. 2).

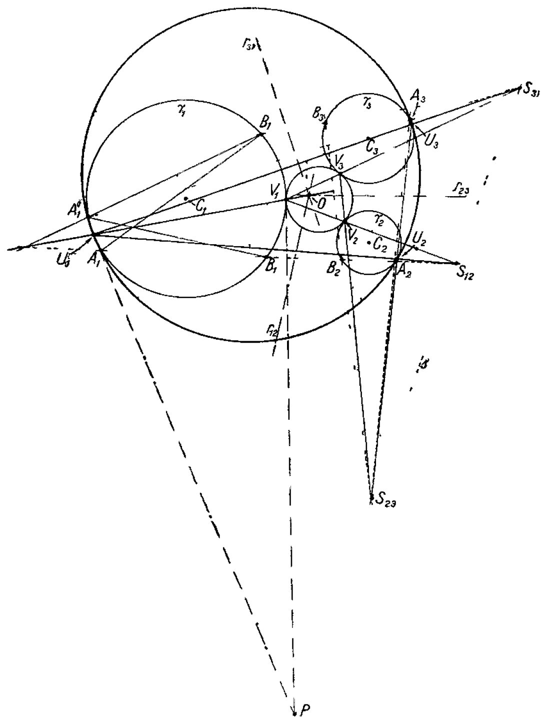

Fig 2

l'insieme delle nostre sei omologie non è un gruppo di omologie Dimostro più avanti che il prodotto di tre omologie a centri allineati è pero ancora un'omologia, e precisamente un'omologia armonica.

([4]) Quando i centri dei cerchi sono allineati i sei centri di omologia sono pure allineati, ma si ripartiscono sempre senza difficoltà in quattro terne atte a generare le soluzioni col metodo qui esposto.

Tutto ciò è quasi ovvio, ma si incontra qui il lato interessante della soluzione: la proiettività su γ_1 è una involuzione. Questa proposizione, non priva d'interesse in sè, conduce ad una semplificazione nel disegno, bastando costruire due coppie di elementi corrispondenti in π invece di tre. Nella figura 2, oltre agli elementi necessari alla costruzione, sono indicati centro ed assi radicali perchè intervengono nella dimostrazione.

2. **Dimostrazione.** – Suppongo in un primo momento che la proiettività π su γ_1 non sia parabolica nè identica. Nell'omografia Ω (prodotto di tre omologie che mutano γ_1 in γ_2, γ_2 in γ_3, γ_3 in γ_1) il cerhio γ_1 viene mutato in se stesso; la proiettività π su γ_1 ci fa conoscere un triangolo di elementi uniti in Ω; i punti U_1, V_1 e le relative tangenti a γ_1, il loro punto comune P e la retta U_1V_1 medesima.

D'altra parte in Ω è pure unito il centro radicale O dei tre cerchi dati, e sono perciò da prendere in considerazione due casi: 1° O *co ncide con* P. Ne segue che le tangenti a γ_1, γ_2, γ_3 in U_1, U_2, U_3 passano per O e così pure si comportano le tangenti in V_1, V_2, V_3. Allora le circonferenze per U_1, U_2, U_3, e rispettivamente V_1, V_2, V_3, non possono essere tangenti a γ_1, γ_2, γ_3. Vedremo che questi casi da escludere corrispondono alla scelta di tre omologie fattori a centri non allineati. 2° O *non coincide con* P, e, in generale, nemmeno con U_1, V_1 (esamino dopo il caso particolare in cui O, U_1, V_1 non siano distinti). Allora l'omografia Ω è un'omologia di centro P e di asse U_1V_1; π è un'involuzione ([5]). In questo caso le rette U_1V_1, U_2V_2, U_3V_3 passano per O e se ne deduce subito che *i tre centri delle omologie fattori sono allineati*. Sono dunque queste le quattro scelte che conducono al problema di APOLLONIO.

D'ora in avanti suppongo senz'altro i centri allineati. Osservo ancora che è unita in Ω la retta s di tali centri, e che perciò essa appartiene al fascio di centro P. Se poi U_1, V_1, O non sono distinti ed s, U_1P, V_1P neppure (caso di tre cerchi per un punto O con una tangente comune s scelta come retta dei centri di omologia) la proposizione sussiste ancora per continuità: Ω è ancora un'omologia armonica. In questo caso però non occorre alcuna costruzione, degenerando i due cerchi tangenti nella retta s e nel punto O.

([5]) Se un'omologia muta in sè una conica, centro e asse di omologia si corrispondono nella polarità rispetto alla conica senza appartenersi: l'omologia è armonica.

Si veda anche G. CASTELNUOVO: *Lezioni di Geometria Analitica*, parte IV, cap. VI, esercizi.

Abbandoniamo ora l'ipotesi iniziale fatta sulla proiettività π, e supponiamola parabolica. Se Ω è propria, non ha elementi uniti oltre il punto U_1 e la retta tangente a γ_1 in U_1. Il centro radicale O coincide allora con U_1, la retta s con la detta tangente. Ne segue che i tre cerchi sono tangenti in O alla s, nella quale coincidono i tre assi delle omologie fattori. Non è dunque vero che Ω sia propria; essa degenera, e, quale omologia armonica, degenera subordinando su γ_1 un'involuzione parabolica. In questo caso ogni cerchio tangente ad s in O è una soluzione del problema.

Finalmente, se la proiettività π è identica, anche l'omografia Ω è identica; i due cerchi tangenti ai tre cerchi dati coincidono con γ_1; è il caso in cui γ_2, γ_3 sono tangenti a γ_1 in punti distinti.