
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIERO POZZATI

La lastra rettangolare sostenuta da un reticolo di travi di qualunque rigidità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3
(1948), n.3, p. 236-248.

Zanichelli

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_236_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La lastra rettangolare sostenuta da un reticolo di travi di qualunque rigidità (*).

Nota di PIERO POZZATI (a Bologna).

Sunto. - Viene indicato un metodo semplice per il calcolo della lastra rettangolare, appoggiata al contorno, sostenuta da un reticolo di travi e soggetta a qualsiasi condizione di carico. Il procedimento si svincola dalla necessità di studiare la lastra decomposta in striscie e tiene conto dell'effettivo comportamento di questa.

Viene data la soluzione in serie doppia (facendo diretto riferimento alla soluzione di NAVIER) della lastra soggetta lungo una retta generica, parallela ai lati, ad una distribuzione qualunque e continua di forze. Nota tale ricerca sarà semplice giungere al calcolo della lastra in intreccio di travi.

In particolare, lo studio della lastra caricata simmetricamente rispetto alle due mediane, sostenuta da due travi aventi gli assi in corrispondenza delle mediane stesse, permette, considerando infinitamente rigide le due travi, di giungere alla soluzione della lastra avente due lati consecutivi incastrati e gli altri due appoggiati, soggetta a condizione qualunque di carico.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Bologna.

1. Tutte le volte che, nel progetto di una lastra, è notevole la luce o sono elevati i carichi, o, in generale, si temono trepidazioni e vibrazioni sensibili dell'insieme, è necessario irrigidire la lastra stessa con un opportuno numero di nervature. Lo studio della lastra rettangolare su un reticolo di travi frequentemente si presenta nella pratica del progettista (solai a cassettone, taluni impalcati dei ponti, le paratoie, etc.) e, di solito, quando si ha a che fare con struttura a doppio ordine di nervature, qualunque ricerca intuitiva tendente a semplificare l'indagine dividendo in striscie la lastra, perde di efficacia e i risultati ottenuti hanno incerta attendibilità. La letteratura tecnica offre numerose trattazioni delle strutture a travi incrociate, ma, in generale, i metodi proposti anche i più ingegnosi, non tengono conto del contributo alla resistenza fornito dalla lastra funzionante come tale ⁽¹⁾.

Il metodo che verrà esposto tiene invece conto dell'effettivo comportamento della piastra e il procedimento di calcolo, molto spontaneo, è già ben noto nello studio delle travi continue: si pensano tolte le nervature e si considera la lastra appoggiata al contorno, soggetta ai carichi esterni ed alle reazioni (normali al suo piano) che le travi elastiche le trasmettono.

Si impone poi la condizione che la deformazione della superficie elastica della lastra (per effetto delle forze e delle reazioni) lungo la retta 1-1, ad esempio, sia uguale alla linea elastica della trave 1-1 stessa (v. fig. 1). Altrettanto per tutte le altre travi. Si presenta quindi la necessità di risolvere sistemi di equazioni che però, nei casi pratici, non presentano difficoltà notevoli.

Assumendo un tale schema, si compie naturalmente un errore: nel rispetto della congruenza si impone infatti, fra lastra e travi, la condizione di uguali abbassamenti, ma non si tiene conto dei momenti torcenti che la lastra trasmette alle travi, la reazione è supposta inoltre concentrata lungo una linea e non su una striscia (larga quanto la sezione delle

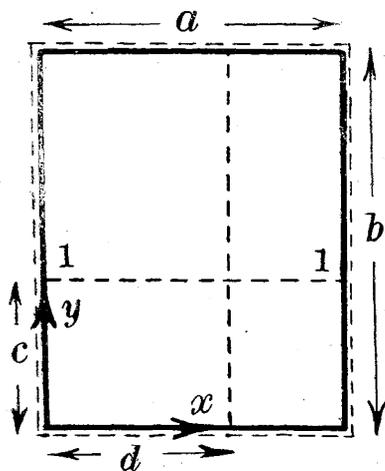


Fig. 1.

⁽¹⁾ A. DANUSSO, *Contributo al calcolo pratico delle piastre appoggiate al contorno*, « Il Cemento Armato », dal luglio 1925 all'agosto 1926.

O. ZANABONI, *Reticoli di travi a grande numero di maglie*, « Giornale del Genio Civile », fascicolo V, 1947.

nervature) e per le travi è trascurato il momento torcente mutuo che la loro solidarietà comporta.

Ovviamente questi errori scompaiono quando si studia la lastra su due sole travi disposte in corrispondenza delle mediane e, in generale, si ha ragione di ritenere che siano ben piccoli ⁽²⁾; ad ogni modo sono sempre tali (per quanto riguarda le deformazioni, i momenti positivi della lastra, i momenti delle travi), che i risultati che si ottengono sono maggiori dei reali, quindi tranquillizzanti.

Nella nota che seguirà la presente, verranno date tabelle che forniscono i valori dei momenti nei punti che maggiormente interessano relativamente a lastre con numero diverso di scomparti (si giungerà fino a 25 scomparti); tali tabelle faciliteranno inoltre notevolmente i calcoli di quei casi che non rientrano negli schemi indicati.

È evidente che, poichè il metodo permette di studiare la lastra su un reticolo di travi aventi qualunque rigidezza, si potrà agevolmente risolvere il problema della lastra su travi infinitamente rigide, cioè continua su muri.

Il procedimento si basa sull'impiego delle serie doppie come nelle soluzioni date da NAVIER, utilizzando la loro nota particolare duttilità e maneggevolezza; permette inoltre di studiare, come si vedrà in note successive, diversi problemi di pratica importanza senza dover introdurre complicazioni notevoli (solai a fungo irrigiditi da travi che collegano i pilastri, platee di fondazione nervate ecc.).

2. Premettiamo alcune osservazioni.

Poichè una qualunque funzione definita in un certo intervallo da 0 a l , avente un'unica espressione analitica $q(x)$, oppure avente diverse espressioni $q_1(x)$ da 0 ad a_1 , $q_2(x)$ da a_1 ad a_2 ... $q_r(x)$ da a_{r-1} ad l e tale che si annulli negli estremi 0 ed l , può essere sempre rappresentata mediante una serie di seni, il carico agente su una

S. TIMOSHENKO, *Über die Biegung von Trägerrosten*, « Zeitschrift für angewandte Math. und Mech. ». 1933, pag. 153.

Su questo argomento M. T. HUBER ha pubblicato diverse memorie (« Z. Österr. Ing. u. Archit. Ver. », pag. 557, 1914) che si basano sulla teoria delle lastre anisotrope e che riconducono lo studio della lastra irrigidita in entrambi le direzioni a quello di una piastra di spessore costante. (Si veda S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells*, cap. V, par. 37).

⁽²⁾ Le nervature che generalmente hanno sezione rettangolare stretta hanno piccola rigidezza se soggette a momenti torcenti. In definitiva nella nota presente viene studiata la lastra appoggiata su un intreccio di travi non solidale con queste.

trave di lunghezza l di rigidezza $B_t = EJ_t$, appoggiata agli estremi, trova comoda e feconda rappresentazione nella forma

$$(a) \quad q = \sum_m F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x,$$

dove le costanti F_m sono le ampiezze delle varie sinusoidi con m semionde che, sovrapponendosi, rappresentano la funzione data.

Convenendo di rappresentare anche la linea elastica della trave in modo analogo, si ottiene

$$(b) \quad \eta = \sum_m c_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x$$

nella quale il coefficiente indeterminato c_m è facilmente determinato nel rispetto della nota relazione

$$(c) \quad \eta^{IV} = q/B_t.$$

Derivando infatti quattro volte la (b) e sostituendo l'espressione trovata e la (a) nella (c), si ha (relativamente a un termine della serie)

$$c_m \frac{m^4 \pi^4}{l^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x = \frac{F_m}{B_t} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x$$

dalla quale

$$c_m = \frac{l^4}{\pi^4 B_t} \frac{F_m}{m^4}.$$

Si ottiene infine, sostituendo nella (b)

$$(1) \quad \eta = \frac{l^4}{\pi^4 B_t} \sum_m \frac{F_m}{m^4} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x.$$

Derivando la (1) si ha facilmente qualunque azione interna che si desideri dalle note relazioni; ad esempio il momento vale

$$(2) \quad M = -B_t \eta'' = \frac{l^2}{\pi^2} \sum_m \frac{F_m}{m^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} x.$$

Se il carico è concentrato alla distanza c dall'estremo appoggiato della trave, si trova, per note proprietà della serie di FOURIER, che

$$(d) \quad F_m = \frac{2P}{l} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{l} c.$$

Premesso ciò, dedichiamo il prossimo paragrafo alla soluzione in serie doppia della lastra di lati a, b , soggetta ad un carico distribuito con legge qualsiasi $q(x) = \sum_m F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x$ lungo la retta $1-1$, parallela all'asse x , ad esempio (v. fig. 1).

Nota tale ricerca, sarà semplice giungere, per la via suggerita, al calcolo della lastra su intreccio di travi.

3. Consideriamo una lastra rettangolare di lati a e b (v. fig. 1), appoggiata lungo il contorno, di spessore s e di rigidezza

$$B = Es^3/12(1 - \nu^2) \left(\nu = \frac{1}{m}, \text{ coefficiente di POISSON} \right)$$

soggetta, lungo la retta $1 - 1$, parallela all'asse x , di equazione $y = c$, ad un carico distribuito con legge qualunque. L'origine degli assi sia in un angolo della lastra.

Rappresentiamo la superficie elastica $w(x, y)$ mediante la soluzione di NAVIER che è espressa dalla serie doppia di FOURIER

$$(e) \quad w = \sum_m \sum_n c_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y$$

nella quale i coefficienti c_{mn} sono da determinare.

Sviluppando in serie doppia di FOURIER anche il carico esterno, si ha

$$(f) \quad p = \sum_m \sum_n p_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y.$$

Il coefficiente p_{mn} dipende naturalmente dal tipo di carico che agisce sulla lastra e si può ottenere dalle note proprietà della serie di FOURIER stessa.

Nel caso in esame (che riguarda un carico distribuito sulla retta $1 - 1$) è preferibile trovarne l'espressione per via semplificata ed intuitiva: basta considerare che il carico, il quale è distribuito con la legge generica $q(x) = \sum_m F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x$ nella direzione parallela all'asse x è un carico, per quanto riguarda la direzione parallela all'asse y , concentrato alla distanza c dall'origine, quindi (v. relazione (d)), si ha

$$(g) \quad p_{mn} = \frac{2F_m}{b} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} c.$$

Applicando l'operatore di LAPLACE

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

alla espressione (e), si ottiene

$$(h) \quad \nabla^4 w = \sum_m \sum_n \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 c_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y.$$

Infine nel rispetto dell'equazione di LAGRANGE

$$\nabla^4 w = p/B,$$

ossia uguagliano ciascun coefficiente della (h) a ciascun coefficiente della (f) con p_{mn} espresso dalla (g), si ha

$$\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 c_{mn} = \frac{2F_m}{Bb} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} c$$

dalla quale vengono determinati facilmente i coefficienti c_{mn} .

Sostituendo l'espressione di c_{mn} nella (e) si ottiene l'equazione della superficie elastica della lastra soggetta lungo la retta $y = c$ alla distribuzione generica di carico $q(x) = \sum_m F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x$, (3)

$$(3) \quad w = \frac{2a^4 b^3}{\pi^4 B} \sum_m \sum_n \frac{F_m \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} c \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \cdot (m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

4. Se il carico è distribuito lungo la retta (parallela all'asse y) $x = d$, con la legge generica $q(y) = \sum_n E_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y$, si ottiene, in modo del tutto analogo,

$$(4) \quad w = \frac{2a^3 b^4}{\pi^4 B} \sum_m \sum_n \frac{E_n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} d \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

I coefficienti F_m e E_n sono determinati, nel problema della lastra su travi, dalla condizione di congruenza già espressa nel parag. 1. nel modo che, dettagliatamente, verrà esposto (v. parag. 8).

5. Dall'espressione $w(x, y)$ si deducono quelle dei momenti in un punto generico della lastra mediante le relazioni

$$m_x = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad m_y = -B \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$m_{xy} = -(1 - \nu) B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Ad esempio si ottiene dalla prima delle relazioni precedenti, per $\nu = 0$ (come circa è per il cemento armato), operando sulla (3),

$$(5) \quad m_x = \frac{2a^2 b^3}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{m^2 F_m \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} c \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y}{(m^2 b^2 + n^2 a^2)^2} \quad (m, n = 1, 2, 3 \dots).$$

(3) Una facile verifica si ottiene considerando un carico p_0 distribuito uniformemente lungo la retta $y = c$, per il quale, come è noto, è $F_m = \frac{4 p_0}{\pi m}$.

Integrando la relazione (3), poichè $F_m = \frac{4 p_0}{\pi m}$ e $\int_{c=0}^b \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} c \, dc = \frac{2b}{n\pi}$, si ritrova la soluzione di NAVIER della lastra caricata uniformemente.

6. In tutte le espressioni trovate, quando il carico è simmetrico

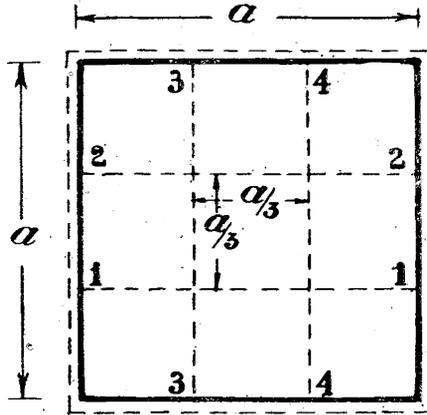


Fig. 2-a.

rispetto a entrambi le mediane, vanno sempre presi i soli termini dispari ($m, n = 1, 3, 5, 7 \dots$).

7. *Caso della lastra quadrata.* Se $a = b$, le relazioni (3), (4), (5), si semplificano; ad esempio, nel centro della lastra, si ha

$$(6) \quad f = \frac{2a^3}{\pi^4 B} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}} F_m \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} c}{(m^2 + n^2)^2} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots)$$

$$(7) \quad m_c = \frac{2a}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}} m^2 F_m \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} c}{(m^2 + n^2)^2} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots)$$

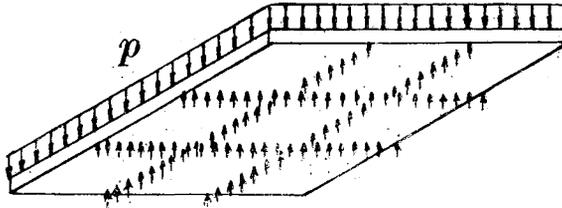


Fig. 2-b.

8. Riferiamoci ad un esempio, onde sia più facile seguire con un'applicazione pratica quanto è già stato esposto nei paragrafi 1, 3.

Sia data una lastra quadrata ($a = b$) caricata uniformemente, sostenuta da due travi in ciascuna direzione (9 scomparti), di rigidità $B_i = EJ$, tutte uguali tra loro (v. figg. 2-a e 2-b).

Per ragioni di simmetria le reazioni delle travi sono evidentemente uguali (si ha quindi $F_m = E_n$). Dalla nota soluzione di NAVIER della lastra caricata uniformemente si ha per effetto del solo carico p

$$w_p = \frac{16p}{\pi^6 B} \sum_m \sum_n \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots).$$

Poichè la lastra è quadrata la deformazione in corrispondenza della retta $y = a/3$, vale

$$w_p = \frac{16pa^4}{\pi^6 B} \sum_m \sum_n \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}}{mn (m^2 + n^2)^2} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots).$$

La deformazione prodotta dalla reazione della trave 1-1 in corrispondenza della retta 1-1 stessa ($y = a/3$) è (ponendo $a = b$ e $c = a/3$ nella relazione (3))

$$w_{1-1} = \frac{2a^3}{\pi^4 B_m n} \sum_m \sum_n \frac{F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{3}}{(m^2 + n^2)^2}.$$

La deformazione prodotta dalla reazione della trave 2-2 in corrispondenza della retta 1-1 ($y = a/3$) è (ponendo $c = 2a/3$ nella relazione (3))

$$w_{1-2} = \frac{2a^3}{\pi^4 B_m n} \sum_m \sum_n \frac{F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}}{(m^2 + n^2)^2}.$$

Nella sovrapposizione degli effetti che segue, poichè per valori pari di n è $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} = -\operatorname{sen} \frac{2n\pi}{3}$, e per valori dispari di n $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{3}$, i termini con n pari si elidono e rimangono solo quelli con n dispari: si ha quindi, tenendo conto di tale semplificazione, $w_{1-1} = w_{1-2}$.

Di ciò si ha conferma considerando che, poichè i carichi sono simmetrici rispetto a entrambi le mediane, debbono essere presi i soli termini dispari di tutte le serie considerate (v. paragrafo 6).

L'innalzamento dovuto alle reazioni delle travi 3-3, 4-4, sono evidentemente uguali ($\operatorname{sen} \frac{m\pi}{3} = \operatorname{sen} \frac{2m\pi}{3}$ con $m, n = 1, 3, 5 \dots$) e valgono (ponendo nella (4) $a = b$ e $d = a/3$)

$$w_{1-3} = w_{1-4} = \frac{2a^3}{\pi^4 B_m n} \sum_m \sum_n \frac{F_n \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}}{(m^2 + n^2)^2} \quad (m, n = 1, 3, 5 \dots).$$

Imponendo la condizione di congruenza (v. paragr. 1)

$$w_p - 2w_{1-1} - 2w_{1-3} = \eta$$

dove η rappresenta la linea elastica della trave (v. espressione 1), si ha

$$\frac{16pa^4}{\pi^6 B} \sum_m \sum_n \frac{\operatorname{sen} \frac{m\pi}{3} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}}{mn(m^2 + n^2)^2} - 2 \left(\frac{2a^3}{\pi^4 B} \sum_m \sum_n \frac{F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{3} x \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{3}}{(m^2 + n^2)^2} \right) -$$

$$- 2 \left(\frac{2a^3}{\pi^4 B} \sum_m \sum_n \frac{F_n \operatorname{sen} \frac{m\pi}{3} x \operatorname{sen} \frac{m\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}}{(m^2 + n^2)^2} \right) = \frac{a^4}{\pi^4 B_t} \sum_m \frac{F_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{3} x}{m^4}.$$

Come è noto le serie doppie si calcolano ponendo, ordinatamente, $m = 1, n = 1, 3, 5, \dots$; $m = 3, n = 1, 3, 5, \dots$; $m = 5, n = 1, 3, 5, \dots$; etc.

Per un determinato valore di m , posto $\frac{B_t}{Ba} = \lambda$, si ha infine

$$(8) \quad F_m \sum_n \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{3}}{(m^2 + n^2)^2} + \operatorname{sen} \frac{m\pi}{3} \sum_n \frac{F_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}}{(m^2 + n^2)^2} + \frac{F_m}{4\lambda m^4} = \frac{4}{\pi^2} pa \sum_n \frac{\operatorname{sen} \frac{n\pi}{3}}{mn(m^2 + n^2)^2}.$$

Si ottiene così questo sistema di infinite equazioni lineari (una per ogni valore di m) che permettono di determinare i vari coefficienti $F_1, F_3, F_5, F_7, \dots$ che, sostituiti nelle espressioni (3) e (4) danno la corrispondente superficie elastica e quindi, sovrapponendo gli effetti delle reazioni e del carico (v. esempio) qualunque azione interna che si desideri.

In pratica è sufficiente limitare il sistema a 2, 3 equazioni data la convergenza sia dei vari F_m , sia della serie (3), (4), (5).

Ciò sarà praticamente dimostrato nell'esempio che segue.

Naturalmente, ponendo $\lambda = 0$, cioè $B_t = 0$ (ossia lastra senza nervatura), si trova $F_m = 0$. Ponendo $\lambda = \infty$ si hanno i vari F_m relativi al caso della lastra continua su travi infinitamente rigide.

In modo analogo si studia la lastra su un numero di travi maggiore: ad esempio se la lastra è quadrata con 25 scomparti (8 travi di sostegno), si hanno due sistemi di equazioni del tipo 5 cioè, praticamente un sistema di 6 \cdot 8 equazioni.

9. ESEMPIO. Lastra quadrata di cemento armato

$$(E = 2.10^5 \text{Kg/cmq.}; \nu = 0,1 \approx 0),$$

di lato $a = 10$ m, di spessore $s = 20$ cm, sostenuta da quattro travi di sezione 30×65 cm, soggetta ad un carico uniformemente ripartito $p = 800$ Kg/mq.

Coi dati dell'esempio si ha

$$\text{per la trave: } B_t = EJ_t = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 30 \cdot 65^3}{12} = 137313 \cdot 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2.$$

$$\text{per la lastra: } B = E \cdot \frac{1 \cdot s^3}{12} = 133 \cdot 10^6 \text{ kgcm}.$$

$$\lambda = \frac{B_t}{Ba} = \frac{137313 \cdot 10^6}{133 \cdot 10^6 \cdot 1000} = 1,03 \approx 1$$

Per facilitare i calcoli riportiamo la tabella dei valori della funzione $\frac{m\pi}{3}$ per $m = 1, 3, 5, \dots, 19$. (con $m = 19$ l'approssimazione ottenuta è più che sufficiente). I valori pari di m sono stati esclusi poichè il carico e le reazioni sono simmetrici.

Il calcolo dei coefficienti delle equazioni del tipo (8) si ottiene molto facilmente ponendo $m = 1, n = 1, 3, 5, \dots$; $m = 3, n = 1, 3,$

m	$\text{sen } \frac{m\pi}{3}$	m	$\text{sen } \frac{m\pi}{3}$
1	0,86603	11	- 0,86603
3	0	13	0,86603
5	- 0,86603	15	0
7	0,86603	17	- 0,86603
9	0	19	0,86603

\bar{e}, \dots ; $m = 5, n = 1, 3, 5, \dots$ etc.; per ogni valore di m si ottiene naturalmente una equazione.

Ad esempio, ponendo $m = 1$ e $n = 1, 3, 6, \dots, 19$, la prima equazione, essendo $\text{sen}^2 \frac{m\pi}{3} = 0,75$, è:

$$\begin{aligned} & 0,75 F_1 \left(\frac{1}{(1+1)^2} + \frac{1}{(1+5^2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+19^2)^2} \right) + \\ & + \left[0,75 \frac{1}{(1+1)^2} F_1 - 0,75 \frac{1}{(1+5^2)^2} F_5 + 0,75 \frac{1}{(1+7^2)^2} F_7 - 0,75 \frac{1}{(1+11^2)^2} F_{11} \right] + \\ & + \frac{0,25 F_1}{\lambda} = \frac{4}{\pi^2} p a 0,86603 \left[\frac{1}{1 \cdot 1(1+1)^2} - \frac{1}{1 \cdot 5(1+5^2)^2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 19(1+19^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

In tale equazione i coefficienti F_3, F_9 evidentemente scompaiono perchè $\text{sen } \frac{3\pi}{3} = \text{sen } \frac{9\pi}{3} = 0$ e ci si è arrestati al coefficiente F_{11} , essendo del tutto trascurabili i contributi dati dai termini successivi.

Operando in modo analogo (cioè ponendo successivamente $m = 3, 5, 7, 9, 11$) si ottiene il seguente sistema di sei equazioni nel quale però due equazioni contengono ciascuna un'incognita sola e si possono quindi risolvere a parte.

$$\begin{aligned} & \left(0,502000 + \frac{0,333333}{\lambda}\right) F_1 - 0,001479 F_5 + 0,000400 F_7 - 0,000067 F_{11} = \\ & = 0,116883 \text{ pa} \\ & \left(0,011273 + \frac{0,004115}{\lambda}\right) F_3 = 0,001539 \text{ pa}, \\ & -0,001479 F_1 + \left(0,002552 + \frac{0,000533}{\lambda}\right) F_5 - 0,000182 F_7 + 0,000047 F_{11} = \\ & = 0,000133 \text{ pa}, \\ & + 0,000400 F_1 - 0,000182 F_5 + \left(0,000861 + \frac{0,000139}{\lambda}\right) F_7 - \\ & 0,000034 F_{11} = 0,000025 \text{ pa}, \\ & \left(0,000353 + \frac{0,000051}{\lambda}\right) F_9 = 0,000007 \text{ pa}, \\ & -0,000067 F_1 + 0,000047 F_5 - 0,000034 F_7 + \left(0,000209 + \frac{0,000023}{\lambda}\right) F_{11} = \\ & = 0,000003 \text{ pa}. \end{aligned}$$

Da questo sistema, che deve essere simmetrico rispetto alla diagonale principale, ponendo $\lambda = 1$ (come risulta dai dati numerici dell'esempio), si ottiene:

$$\begin{aligned} F_1 = + 0,13972 \text{ pa}; F_3 = + 0,10001 \text{ pa}; F_5 = + 0,11149 \text{ pa}; F_7 = - \\ - 0,01203 \text{ pa}; F_9 = + 0,01733 \text{ pa}; F_{11} = + 0,02996 \text{ pa}. \end{aligned}$$

Come si vede già con $m = 7$, in valore assoluto, F_7 è già circa dieci volte minore di F_1 .

Ad ogni modo tali valori che già diminuiscono per sè stessi al crescere di m , vanno poi sostituiti nelle relazioni (3), (4), (5), che convergono rapidamente nella valutazione delle deformazioni, abbastanza rapidamente nella valutazione dei momenti.

Il numero delle equazioni non ha pratica influenza sui valori di F_m .

Infatti anche con una sola equazione (supponendo cioè $F_3 = F_5 = \dots = 0$), si ottiene $F_1 = 0,13992$ invece di $0,13972$ con un errore dello $0,14\%$.

Ciò è da tenere presente perchè sono i primi termini che hanno importanza.

I valori di F_3 e F_9 non dipendono, come si è visto dagli altri F_m .

Sostituendo nella relazione (6) i valori ottenuti dei coefficienti F_m , si ha facilmente la freccia f moltiplicando per 4 il valore otte-

nuto perchè tutte le travi contribuiscono nella stessa misura all'innalzamento della lastra e sottraendolo dalla freccia f_p , provocato dal solo carico p :

$$f = f_p - 4f_r = (0,00406 - 4 \cdot 0,000695) pa^4/B = 0,00128 pa^4/B = 0,77 \text{ cm.}$$

Con un solo termine, riducendo cioè il sistema di sei equazioni ad una sola equazione (4) si sarebbe ottenuto (ponendo $F_1 = 0,13992$, $F_3 = F_5 = \dots = 0$), 0,000712 invece di 0,000695 con un errore relativo del 2,4 0/0.

Per il calcolo del momento nel centro di una delle nervature la relazione (2) fornisce

$$m_c = \frac{a^3}{\pi^2} \sum_m \frac{F_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2} = \frac{pa^3}{\pi^2} \left(+0,13972 - \frac{0,10001}{9} + \frac{0,11149}{25} - \frac{0,01203}{49} + \frac{0,01733}{81} - \frac{0,02996}{121} \right) = 0,0135 pa^3 = 10800 \text{ Kgm.}$$

Con un solo termine si sarebbe ottenuto 0,0142 invece di 0,0135 con un errore relativo del 5,2 0/0.

Procedendo sempre in modo analogo il momento nel centro della lastra vale (sostituendo i valori dei coefficienti F_m nella 7)

$$m_c = m_p - \Sigma m_r = (0,03684 - 0,02068) pa^2 = +0,01616 pa^2 = 1293 \text{ Kgm/m.}$$

Con un solo termine si sarebbe ottenuto 0,0224 invece di 0,0207 con l'errore relativo dell' 8,2 0/0. Se la lastra fosse senza nervature si otterrebbe $m_c = 0,03684 pa^2 = 2947 \text{ Kgm/m.}$

10. Nel procedimento dunque (sia per le travi che per la lastra) gli errori sono ben modesti anche riducendo il sistema di sei equazioni ad una sola equazione, cioè considerando le formole (2), (3), (4), (5), (8) come risolutive.

Se lo scomparto centrale di lato $a/3$ venisse considerato come posto in una situazione intermedia a quelle corrispondenti al contorno incastrato ed appoggiato, si commetterebbe un errore molto forte poichè la sua situazione statica è strettamente legata a quella dell'intera lastra.

Sulle nervature si scarica una piccola parte del carico: infatti se ci si propone di trovare quale striscia $a \cdot x$ (supposto che la lastra non esistesse) si dovrebbe caricare per produrre uguale momento nel

(4) Ciò corrisponde a considerare sinusoidale la reazione delle travi.

centro della trave, si avrebbe $\frac{p \cdot x \cdot a^2}{8} = 0,0135 p a^3$, dalla quale si ottiene $x \approx a/10$.

Nonostante la modesta sezione ed il limitato numero delle travi, il momento nel centro della lastra (il più importante) è diminuito di più della metà: *ciò consiglia di adottare con favore l'irrigidimento della lastra con nervature*. Queste, ad ogni modo, debbono avere sezioni ben proporzionate allo spessore della lastra perchè abbondare significa quasi sempre peggiorare il regime statico dell'insieme, in quanto si creano appesantimenti ed elevati momenti negativi nella lastra stessa. Ciò più ampiamente si vedrà nella nota che seguirà alla presente nella quale verranno date numerose tabelle che permettono al progettista orientamenti e calcoli facilitati.

Se il carico non è ripartito, non si hanno complicazioni, poichè nei termini noti delle equazioni (8) compaiono le corrispondenti soluzioni di NAVIER per carico o parziale o concentrato sulla lastra (5).