Bollettino
Unione Matematica Italiana

Aldo Andreotti

Applicazione di un teorema di Schottky-Cecioni allo studio della geometria sopra una curva ellittica in relazione con quello sopra due curve ellittiche reali del tipo di Harnach

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 210–214.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_210_0>

Applicazione di un teorema di Schottky-Cecioni allo studio della geometria sopra una curva ellittica in relazione con quello sopra due curve ellittiche reali del tipo di Harnach.

Nota di ALDO ANDREOTTI (a Pisa).

Sunto. - *Con procedimenti di rappresentazione conforme, si associa ad ogni curva ellittica una coppia di curve ellittiche del tipo* HARNACH *le quali individuano la curva rispetto al gruppo delle trasformazioni birazionali ed antibirazionali.*

Si deve al prof. CECIONI [1] il seguente notevole teorema (estensione di un noto risultato dello SCHOTTKY):

[1] CECIONI: *Sulla rappresentazione conforme delle aree pluriconnesse appartenenti a superficie di Riemann*, « Annali delle Università Toscane », (1928).

Ogni dominio appartenente ad una superficie di Riemann, il quale abbia genere P *e sia limitato da* $\rho+1$ *contorni* (formati con archi di linee analitiche), *può applicarsi in modo biunivoco e conforme sopra una delle due parti in cui la riemanniana di una curva reale, ortosimmetrica, di genere* $p=2P+\rho$, *con* $\rho+1$ *circuiti reali è spezzata dalle sue* $\rho+1$ *linee d'incidenza* (1).

Qui applichiamo il teorema al caso semplicissimo in cui sia $P=0$, $\rho=1$, per dimostrare come lo studio delle curve ellittiche rispetto alle trasformazioni birazionali ed antibirazionali (ossia conformi, dirette e inverse fra le loro riemanniane) possa esser ricondotto a quello di una coppia di curve ellittiche di HARNACH, cioè possedenti due circuiti reali.

1. Sia R la riemanniana di una curva ellittica C. È noto che l'integrale abeliano di prima specie j appartenente a C, uniformizza la C, distendendo in modo conforme ed univoco (nel passaggio dalla sfera complessa (j), ove si pensano distesi i valori di j, alla riemanniana R) la R sulla sfera (j) privata del punto $j=\infty$.

Siano a, b, i due cicli di una retrosezione fissata su R, uscenti da un punto O. Per essi si posson sempre pensare soddisfatte le seguenti condizioni:

1°) lungo ciascuno di quei cicli i valori assunti da j siano funzione lineare di un parametro reale,

2°) il periodo di j lungo uno, ad esempio a, di quei cicli sia fra i periodi ciclici non nulli di j, che hanno modulo minimo,

3°) l'angolo non ottuso $\widehat{ab}$ che i due cicli a, b, formano in O sia il massimo possibile. Indicando con α, β i periodi di j lungo a, b, rispettivamente, risulta:

$$|\beta| \cos \widehat{ab} \leq \frac{1}{2} |\alpha| \quad (2).$$

Precisamente si trova che, fissato O, la retrosezione (a, b) uscente da O e soddisfacente alle condizioni precedenti è univocamente in-

(1) Questo teorema consegue quasi immediatamente dalla definizione di superficie di RIEMANN astratta, dal teorema fondamentale di esistenza di RIEMANN e da un noto teorema di KLEIN sulla caratterizzazione delle riemanniane delle curve algebriche reali (v. ad es. KOEBE, *Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten*, « Acta Mathematica », (1927); KLEIN, *Riemannsche Flächen*, Göttingen, litografie, (1894)).

Ciò senza che occorra far appello ai teoremi di esistenza delle funzioni armoniche, ma rimanendo costantemente nel campo complesso.

(2) Le condizioni 2°) e 3°) non sono, a rigore, indispensabili per quel che segue; le abbiamo aggiunte per semplificare, nel seguito, l'esposizione.

dividuata, a meno che non sia $|\beta| \cos \widehat{ab} = \frac{1}{2} |\alpha|$, nel qual caso di tali retrosezioni ne esistono due.

Queste retrosezioni hanno carattere invariante di fronte alle trasformazioni conformi dirette e inverse. Non solo, ma poichè su C esiste un gruppo assolutamente transitivo di trasformazioni birazionali della curva in sè, la, o le due retrosezioni relative ad un punto O, comunque fissato su R, possono essere trasportate, con una trasformazione siffatta, in quella, o in quelle relative ad un altro punto qualsiasi di R.

Assunto O come origine dei cammini d'integrazione e tagliata R lungo i due cicli a, b, R si distende in modo biunivoco e conforme sul piano (j) nel parallelogramma Π di vertici 0, α, β, $\alpha + \beta$.

Inversamente assegnato su (j) ad arbitrio un parallelogramma Π, compatibilmente colle condizioni corrispondenti a 2°) e 3°), è individuata, a meno di una trasformazione biunivoca conforme diretta, la riemanniana R di una curva ellittica da cui Π può pensarsi ottenuto nel modo suindicato.

Basta, invero, osservare che, diviso Π in due triangoli con una diagonale, con questi si può formare, ed in un sol modo, una superficie di RIEMANN astratta nel senso di KOEBE [1], la quale è riemanniana di una curva ellittica da cui Π si ottiene nella maniera anzidetta.

2. Su R consideriamo una retrosezione (a, b) del tipo indicato. Tagliando R una volta lungo a, ed un'altra volta lungo b, otteniamo due domini chiusi, connessi, di genere 0, con due contorni ciascuno, i quali (pel citato teorema di SCHOTTKY–CECIONI) possono venir applicati in modo biunivoco e conforme sopra una delle due parti in cui la riemanniana di una curva ellittica di HARNACH è divisa dalle sue linee d'incidenza.

Dalle osservazioni fatte alla fine del n. 1, consegue che le due curve di HARNACH che vengono in questa guisa associate alla curva C, non dipendono in alcun modo dalla scelta della retrosezione (a, b) su R (cioè nè dalla scelta della retrosezione uscente da O, qualora ve ne fossero due, nè dalla scelta del punto O su R).

Notiamo che la stessa coppia di curve di HARNACH resta associata anche alla curva immaginaria coniugata di C.

Viceversa è naturale domandarsi sotto quali condizioni una coppia H_a, H_b, di curve di HARNACH può pensarsi associata, nel senso sopra precisato, ad una curva ellittica, e, quando ciò accada,

(1) KOEBE, loc. cit., pag. 119.

da quante curve ellittiche birazionalmente distinte si può pensare ottenuta.

Per questo osserviamo che se j è un integrale abeliano di prima specie, appartenente ad una curva ellittica C, ed H_a H_b sono le curve ellittiche di HARNACH associate a C, j si trasporta in una funzione analitica definita sopra una « metà » di ciascuna delle riemanniane di H_a, H_b. Questa funzione analitica, pel modo con cui si son scelte le retrosezioni (precisamente per la condizione 1°)) può esser definita per simmetria anche sulle due altre « mezze » riemanniane di H_a, H_b. La funzione che in questo modo si ottiene su H_a, H_b, rispettivamente, risulta un integrale abeliano di prima specie appartenente a ciascuna di queste due curve.

Ciò posto, siano j_a, j_b, due integrali di prima specie, appartenenti ad H_a, H_b rispettivamente, i cui integrandi siano funzioni razionali a coefficienti reali, cioè siano reali sulle linee d'incidenza. Scegliamo sulle riemanniane di H_a, H_b due retrosezioni di cui un ciclo sia formato con una delle due linee d'incidenza. I periodi di j_a, j_b lungo gli altri due cicli saranno puramente immaginari onde, moltiplicando j_a, j_b per due costanti reali convenienti, possiamo fare in modo che essi risultino uguali a $2\pi i$.

Se allora ω_a, ω_b sono i periodi (reali) di j_a, j_b lungo le linee d'incidenza, numeri che possiamo senz'altro supporre positivi per opportuna scelta del verso positivo su quelle linee, vorrà dire che il parallelogramma Π, di cui al n. 1 (parallelogramma determinato a meno di una similitudine diretta nel suo piano), avrà il lato omologo di a (b) uguale ad ω_a (ω_b) quando l'altezza relativa è uguale a π.

Ora di parallelogrammi soddisfacenti a questa condizione, come subito si verifica:

non ne esistono se $\omega_a\omega_b < \pi^2$,

ne esiste uno ed è un rettangolo se $\omega_a\omega_b = \pi^2$,

ne esistono due inversamente simili se $\omega_a\omega_b > \pi^2$.

D'altra parte affinchè Π sia dato in modo compatibile colle condizioni 2°) e 3°) del n. 1. dovremo avere anche:

per la 2°) $\qquad \omega_a \leq \omega_b,$

per la 3°) $\qquad \omega_a\omega_b \leq \pi^2 + \frac{1}{4}\omega_a^2.$

Inversamente, assegnate due curve ellittiche di HARNACH H_a, H_b, tali che i periodi reali di prima specie lungo i circuiti reali soddisfino alle disuguaglianze

$$\omega_a \leq \omega_b; \qquad \pi^2 \leq \omega_a\omega_b \leq \pi^2 + \frac{1}{4}\omega_a^2; \qquad (\omega_a > 0,\ \omega_b > 0)$$

esistono due sole curve ellittiche immaginarie coniugate (cfr. l'osservazione alla fine del n. 1) cui la coppia H_a, H_b può pensarsi associata.

Concludendo possiamo dire che:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè due curve ellittiche siano birazionalmente equivalenti, ovvero l'una sia birazionalmente equivalente alla curva immaginaria coniugata dell'altra è che esse abbiano la stessa coppia di curve ellittiche di HARNACH *associate.*

Date due curve ellittiche di HARNACH e detti ω_a, ω_b i periodi (reali) degli integrali abeliani normali reali di prima specie lungo i circuiti reali, *perchè esse risultino associate ad una coppia di curve ellittiche immaginarie coniugate, occorre e basta siano soddisfatte le disuguaglianze:*

$$\omega_a \leq \omega_b; \qquad \pi^2 \leq \omega_a \omega_b \leq \pi^2 + \frac{1}{4}\omega_a^2; \qquad (\omega_a > 0,\ \omega_b > 0).$$

Un semplice esame di queste disuguaglianze dimostra che *la* C *è reale* (e quindi coincide coll'immaginaria coniugata) *se e solo se in una di esse vale almeno una volta il segno di uguale.*