BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

T. Manacorda

Estensione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee complete di una formula di Hartmann e Wintner per la valutazione asintotica del numero degli zeri di un integrale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 205–210.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_205_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Estensione alle equazioni differenziali lineari del secondo ordine omogenee complete di una formula di Hartmann e Wintner per la valutazione asintotica del numero degli zeri di un integrale.

Nota di T. MANACORDA (a Firenze) [1].

Sunto. - *Si trovano delle limitazioni per il numero* N(x) *degli zeri degli integrali dell'equazione* $y'' + 2\varepsilon(x)y' + \omega^2(x)y = 0$, *con* $0 \leq \varepsilon < l$, $l < \omega^2$, $\omega' = o[\omega^2(x)]$ *compresi tra* 0 *ed* x.

Recentemente HARTMANN e WINTNER [2] hanno dato una formula per la valutazione asintotica del numero degli zeri degli integrali della equazione $y'' + \omega^2(x)y = 0$ nelle ipotesi $\omega(x) > 0$, $\omega'(x) = o\,[\omega^2(x)]$. In questa nota, adoperando i risultati già conseguiti in un precedente lavoro [3], ci proponiamo di dare una espressione analoga per gli integrali dell'equazione completa omogenea del secondo ordine.

1. Sia data l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2\varepsilon(x)y'(x) + \omega^2(x)y(x) = 0, \tag{1}$$

sui coefficienti della quale facciamo le ipotesi:

a) $\varepsilon(x)$ *sia funzione continua, non negativa e limitata per* $0 \leq x < +\infty$

$$0 \leq \varepsilon(x) < l;$$

b) $\omega(x)$ *sia funzione continua, positiva e derivabile di* x *con derivata prima continua, soddisfacente alla limitazione*

$$\omega(x) > l, \qquad 0 \leq x < +\infty.$$

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

[2] P. HARTMANN-A. WINTNER, *The asymptotic arcus variation of solution of real linear differential equation of second order*, « Am. Journ. of Math », 70, pp. 1-10, (1948).

[3] T. MANACORDA, *Sul comportamento asintotico degli integrali dell'equazione* $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ *quando* $\lim_{x \to +\infty} q(x) = +\infty$, « Rend. Lincei », (8), 2, pp. 537-541.

Nell'ipotesi ora dichiarate gli integrali della (1) non identicamente nulli possiedono infiniti zeri. Ciò si prova estendendo facilmente al caso nostro un criterio dimostrato nella nota citata in ([3]), num. 2.

Siano x_{2n-1}, $x_{2n}(n = 1, 2, \ldots)$ rispettivamente le ascisse dei punti di zero e estremanti di un integrale della (1), e poniamo

$$m_{2n} = \min_{x_{2n-1} \leq x \leq x_{2n}} \omega(x), \qquad M_{2n} = \max_{x_{2n-1} \leq x \leq x_{2n}} \omega(x).$$

Con un ragionamento analogo a quello adoperato nel n. 3 della nota citata in ([3]) si dimostra subito che valgono le limitazioni:

$$(2) \quad \frac{\pi - 2b_{2n}}{2\sqrt{M^2_{2n} - l^2}} < x_{2n} - x_{2n-1} < \frac{\pi}{2m_{2n}}; \quad \frac{\pi}{2M_{2n+1}} < x_{2n+1} - x_{2n} < \frac{\pi + 2b_{2n+1}}{2\sqrt{m^2_{2n+1} - l^2}};$$

$$0 \leq b_{2n} = \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{M^2_{2n} - l^2}} < \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq b_{2n+1} = \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{m^2_{2n+1} - l^2}} < \frac{\pi}{2}.$$

2. Ciò premesso, aggiungiamo alle ipotesi *a*) e *b*) del n. 1 quella si abbia

$$(3) \qquad \omega'(x) = o\,[\omega^2(x)].$$

Vogliamo allora mostrare che *se* N(x) *indica il numero degli zeri di un integrale della* (1) *compresi tra* 0 *e* x, *scelto un numero* $\sigma > 0$ *e arbitrario, è possibile determinare un* x_0 *tale che per* $x \geq x_0$ *si abbia*

$$[1 - \sigma]\int_0^x \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}\,dt \leq N(x) \leq [1 + \sigma]\int_0^x \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)}\,dt,$$

con

$$(5) \qquad 0 \leq b(x) = \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}} < \frac{\pi}{2}.$$

Cominciamo con l'osservare che nelle nostre ipotesi si ha:

$$(6) \qquad \int_0^{+\infty} \omega(t)dt = +\infty.$$

Se poniamo con Wintner e Hartmann,

$$(7) \qquad e(x) = \operatorname*{extr.\,sup.}_{x \leq u < v < +\infty} \left| \log \frac{\omega(v)}{\omega(u)} \right| \Big/ \left[1 + \frac{1}{\pi}\int_u^v \omega(t)dt\right],$$

si ha

$$\left| \log \frac{\omega(v)}{\omega(u)} \right| = \left| \int_u^v \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}\,dt \right| = \left| \frac{\omega'(\xi)}{\omega^2(\xi)} \right| \int_u^v \omega(t)dt, \qquad u < \xi < v,$$

per cui

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left|\log \frac{\omega(v)}{\omega(u)}\right|}{1+\int_u^v \omega(t)dt} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi}\left|\frac{\omega'(\xi)}{\omega^2(\xi)}\right| = 0,$$

e quindi

$$\lim_{x\to\infty} e(x) = 0. \tag{8}$$

In analogia a quanto fanno HARTMANN e WINTNER nella nota citata, in relazione alla funzione $e(x)$ scegliamo una funzione $F(x)$ monotona crescente che soddisfi alle condizioni

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty,\quad \lim_{x\to\infty} e(x)F(x) = 0,\quad \lim_{x\to\infty} F(x)\Big/\int_0^x \sqrt{\omega^2(t)-l^2}\,dt = 0, \tag{9}$$

e determiniamo poi una successione di punti τ_k con la legge ricorrente

$$\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)}\,dt = F(\tau_{k-1}),\qquad k=1,2,\dots;\ \tau_0 = 0. \tag{10}$$

Per la prima delle (9) si ha $\lim_{k\to\infty} \tau_k = +\infty$, e per la (6)

$$\lim_{k\to\infty} k\Big/\int_0^{\tau_k} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)}\,dt = 0. \tag{11}$$

Posto

$$m_k = \min_{\tau_{k-1}\leq x\leq \tau_k} \omega(x),\qquad M_k = \max_{\tau_{k-1}\leq x\leq\tau_k} \omega(x),$$

e supposto che tra τ_k e τ_{k-1} cadano due zeri consecutivi α e β di $y(x)$, si ha dalle (2)

$$\frac{\pi - b_k}{M_k} < \beta - \alpha < \frac{\pi + b_k}{\sqrt{m_k^2 - l^2}}\qquad 0 \leq b_k = \operatorname{arctg}\frac{l}{\sqrt{m_k^2 - l^2}} < \pi/2, \tag{2'}$$

e in conseguenza per il numero n_k degli zeri di $y(x)$ che cadono tra τ_{k-1} e τ_k si hanno le limitazioni

$$\left[\frac{\sqrt{m_k^2 - l^2}}{\pi + b_k}(\tau_k - \tau_{k-1})\right] \leq n_k \leq \frac{(\tau_k - \tau_{k-1})M_k}{\pi - b_k} + 1,$$

valide anche se tra τ_{k-1} e τ_k non cade alcun zero di $y(x)$ o ne cade uno solo. Detto allora $N(x)$ il numero degli zeri di $y(x)$ che cadono tra 0 e x, e τ_{n-1} il più grande dei punti τ_k che cadono entro $(0, x)$,

$\tau_{n-1} \leq x \leq \tau_n$, si ha

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{(\tau_k - \tau_{k-1}) \sqrt{m_k^2 - l^2}}{\pi - b_k} \right] \leq N(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(\tau_k - \tau_{k-1}) M_k}{\pi - b_k} + n. \tag{12}$$

Consideriamo dapprima la disuguaglianza destra nella (12). Dividendo per

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)} dt$$

si ottiene

$$\frac{N(x)}{\int_0^x \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)} dt} \leq \frac{N(x)}{\int_0^{\tau_{n-1}} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)} dt} \leq \frac{\sum_1^{n-1} \frac{M_k(\tau_k - \tau_{k-1})}{\pi - b_k}}{\sum_1^{n-1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)}} + \frac{n}{\int_0^{\tau_{n-1}} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)} dt} +$$

$$+ M_n \frac{\tau_n - \tau_{n-1}}{\int_0^{\tau_{n-1}} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)} dt},$$

e quindi, tenuto conto della (11)

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x)}{\int_0^x \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)} dt} \leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{M_n(\tau_n - \tau_{n-1})}{(\pi - b_n) \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)} dt} + \tag{11'}$$

$$+ \overline{\lim_{n \to \infty}} M_n \frac{\tau_n - \tau_{n-1}}{\int_0^{\tau_{n-1}} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)} dt}.$$

Osserviamo che per le (7), (8) e (9) si ha:

$$0 \leq \lim_{x \to \infty} \left| \log \frac{\omega(v)}{\omega(u)} \right| \leq \lim_{x \to \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{\pi} \int \omega(t) dt \right\} e(x) \leq \lim_{x \to \infty} [1 + F(\tau_{n-1})] e(x) = 0$$

$$\tau_{n-1} \leq u < v < \tau_n,$$

e che quindi

$$\lim_{n \to \infty} M_n / m_n = 1. \tag{13}$$

Si ha ancora per la (10)

$$\frac{M_n}{\pi}(\tau_n - \tau_{n-1}) = \left(\frac{M_n}{m_n}\right) \frac{m_n}{\pi}(\tau_n - \tau_{n-1}) \leq \frac{M_n}{m_n} F(\tau_{n-1}),$$

e quindi

$$0 \leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{M_n(\tau_n - \tau_{n-1})}{\int\limits_0^{\tau_{n-1}} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)}\, dt} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{M_n}{m_n} \frac{F(\tau_{n-1})}{\int\limits_0^{\tau_{n-1}} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)}} = 0,$$

e dalla (11') risulta

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{M_n(\tau_n - \tau_{n-1})}{\int\limits_0^{\tau_{n-1}} \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)}\, dt} \leq \lim_{n \to \infty} \frac{M_n}{m_n} \frac{\pi - B_n}{\pi - b_n} = 1,$$

avendo posto $B_n = \operatorname{arctg} \frac{l}{\sqrt{M_n^2 - l^2}} < \frac{\pi}{2}$, e tenuto conto della (13). Da questa risulta dunque per $x \geq x_0$

$$N(x) \leq [1 + \sigma] \int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{\pi - b(t)}\, dt.$$

Occupiamoci adesso della disuguaglianza sinistra della (12). Dividendo ambo i membri per $\int\limits_0^x \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}\, dt$ si ottiene

$$\frac{N(x)}{\int\limits_0^x \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}\, dt} \geq \frac{N(x)}{\int\limits_0^{\tau_n} \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}\, dt} \geq \frac{\sum\limits_1^n [(\tau_k - \tau_{k-1})\sqrt{m_k^2 - l^2}/(\pi + b_k)]}{\sum\limits_1^n \int\limits_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}\, dt} -$$

$$- \frac{[(\tau_n - \tau_{n-1})\sqrt{m_n^2 - l^2}/(\pi + b_n)]}{\int\limits_0^{\tau_n} \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}\, dt}.$$

Se osserviamo adesso che si ha

$$0 \leq (\tau_n - \tau_{n-1})\sqrt{m_n^2 - l^2} < \pi F(\tau_{n-1}) \leq \pi F(\tau_n)$$

e quindi

$$0 \leq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{(\tau_n - \tau_{n-1})\sqrt{m_n^2 - l^2}}{\int\limits_0^{\tau_n} \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}\, dt} = 0,$$

e che

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sum_1^n [(\tau_k - \tau_{n-1}) \sqrt{m_k^2 - l^2} / (\pi + b_k)]}{\sum_1^n \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}} \geq 1,$$

si ottiene finalmente

$$\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x)}{\int_0^x \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)}} \geq 1 - \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{(\tau_n - \tau_{n-1}) \sqrt{m_n^2 - l^2}}{(\pi + b_n) \int_0^{\tau_n} \frac{\sqrt{\omega^2(t) - l^2}}{\pi + b(t)} dt} = 1.$$

e perciò la (4).

Osserviamo che se l, e perciò $\varepsilon(x)$, è nulla, dalla (4) si ha

$$\lim_{x \to \infty} \frac{N(x)}{\frac{1}{\pi} \int_0^x \omega(t) dt} = 1,$$

come hanno mostrato Hartmann e Wintner nel lavoro citato.

Osserviamo ancora che, ferme restano le ipotesi a) e b) del n. 1, se $\lim_{x \to \infty} \omega(x)$ esiste *finito*, può togliersi l'ipotesi $\omega' = o(\omega^2)$. Difatti si ha in questo caso senz'altro $\lim_{k \to \infty} M_k / m_k = 1$, e non è necessario far intervenire la funzione $e(x)$.