Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Osservazioni sulle involuzioni piane più volte infinite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.3, p. 196–200.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_3_196_0>

Osservazioni sulle involuzioni piane più volte infinite.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Bologna) (*).

Sunto. - *Definite le involuzioni* ∞^d *di gruppi* n *punti di un piano, se ne studiano alcuni semplici esempi mostranti fra l'altro come — per* $d \geq 3$ *— si presentino fatti nuovi, non aventi l'analogo per* $d = 1, 2$.

1. In virtù di un classico risultato — dovuto al CASTELNUOVO (1) — ogni involuzione ∞^2 di gruppi di n (≥ 1) punti di un piano è razionale, e può quindi (in infiniti modi) ottenersi come totalità dei gruppi caratteristici di una rete di curve piane. La questione d'introdurre e classificare le *involuzioni piane più volte infinite* non è ancora stata posta — nè, tanto meno, affrontata — prima d'ora: ciò forse perchè essa presenta difficoltà tali da render ogni risultato generale assai arduo e riposto.

Nel presente lavoro, definite le involuzioni di dimensione qualsiasi su di un piano (o, più generalmente, su una varietà algebrica), se ne studiano alcuni semplici esempi lumeggianti taluna fra le suddette difficoltà.

2. Un'*involuzione* ∞^d *di gruppi di* n *punti* di un piano π — brevemente: una I_n^d — verrà definita per induzione rispetto a d nel modo seguente.

1°) Una I_n^0 non è che un gruppo non ordinato di n punti, distinti o coincidenti arbitrariamente fra loro, di π; un gruppo siffatto si denoterà anche talora col simbolo G_n.

2°) Una I_n^1 è una serie d'equivalenza g_n^1 su di una curva, eventualmente riducibile, di π; ogni $I_n^1 = g_n^1$ risulta notoriamente razionale, ed anzi lineare (2).

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna, comunicato nel settembre 1948 al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

(1) G. CASTELNUOVO, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, « Math. Ann. », 44 (1894) = *Memorie scelte* (Bologna 1937), 275-304.

(2) Ved. F. SEVERI, *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, vol. I (a cura di Conforto e Martinelli), Roma 1942, n. 67.

3°) Una I_n^d, per $d \geq 2$, è un sistema algebrico puro ∞^d di G_n di π, tale che i resti di un generico punto P di π rispetto ai suoi G_n costituiscano una I_{n-1}^{d-2}.

Va rilevato che, nella precedente definizione di involuzione piana, il caso in cui la dimensione sia pari si presenta assai diversamente da quello in cui la dimensione sia dispari [3]. In quest' ultima ipotesi la definizione potrebbe venire modificata, esigendo soltanto l'involutorietà delle I_n^1, e cioè assumendo che una I_n^1 sia un'involuzione γ_n^1 su di una curva (eventualmente riducibile) di π: le I_n^d che così si ottengono verranno dette involuzioni *in senso lato*, chiamando — quando occorra — involuzioni *in senso stretto* quelle definite dapprima.

Si dimostra subito che ogni I_n^d è un sistema algebrico irriducibile di G_n; che i resti di un generico G_k di π $\left(k \leq \left[\frac{d}{2}\right]\right)$ rispetto ai G_n di una I_n^d formano una I_{n-k}^{d-2k}; e che la totalità dei G_n di π costituisce una I_n^{2n}.

Osserviamo che un G_n definisce, come insieme delle rette di π contenenti uno (almeno) dei suoi punti, una curva di classe n. Rappresentate linearmente le curve di classe n di π coi punti di uno spazio S di dimensione $n(n+3)/2$, si ottiene di conseguenza in S una varietà algebrica, W_{2n}, i cui punti rappresentano biunivocamente senza eccezioni i G_n di π; tale W_{2n} fornisce quindi un'*imagine della* I_n^{2n} costituita da questi G_n. Ogni I_n^d di π, appartenendo manifestamente ad I_n^{2n}, si rappresenta in S coi punti di una V_d giacente sulla W_{2n}; lasciamo al Lettore di interpretare nello spazio S la suddetta definizione delle I_n^d, ciò che porta a caratterizzare in S le V_d di W_{2n} che rappresentano delle I_n^d di π.

Aggiungiamo che le precedenti nozioni sulle involuzioni piane si lasciano estendere senza difficoltà alle superficie algebriche ed alle varietà superiori.

3. Un primo semplice esempio di I_n^d, di dimensione $d = 2h$ pari, è costituito dall'insieme dei gruppi caratteristici d'un sistema lineare di curve piane, di grado n e dimensione $h+1$. Tale insieme si rappresenta birazionalmente in modo ovvio sulla grassmanniana delle rette di S_{h+1}, sicchè ogni I_n^{2h} del tipo suddetto ri-

(3) Nel primo caso la definizione può venir raccostata a quella data dal Severi per le involuzioni sulle curve riducibili: cfr. *loc. cit.* in (2), p. 123.

sulta razionale. È noto che nella categoria in discorso rientra sempre la I_n^{2n} formata da tutti i G_n di π ([4]), sicchè questa I_n^{2n} — epperciò anche la W_{2n} di cui al n. 2 — è pure razionale.

Un esempio più generale di I_n^{2h} $(h \geq 1)$ si ottiene, su di una V_2^n di $S_m (m \geq 3)$, introducendo in S_m un sistema puro di S_{m-2} tale che vi sia uno ed uno solo S_{m-2} del sistema che contenga un generico S_{h-1} di S_m, e considerando la totalità dei G_n segati su V_2^n dai suoi S_{m-2}. Qualora V_2^m sia una superficie razionale, la rappresentazione di questa su di un piano muta ovviamente la suddetta totalità in una I_n^{2h} piana.

4. Definiremo ora un'*involuzione* ∞^3 *in senso stretto*, di coppie di elementi di un ente razionale ∞^2, la quale risulta *irrazionale*.

Partiamo a tal fine da una V_3^3 generale di S_4; essa è irrazionale, come ha recentemente stabilito il FANO ([5]), e siano r una delle sue ∞^2 rette, P un punto situato sulla r e π la stella ∞^2 delle rette di S_4 tangenti in P a V_3^3. Vi sono infinite superficie rigate — aventi la r quale direttrice semplice — che toccano V_3^3 lungo la r; una di esse resta ad esempio definita coll'assegnarne una direttrice ulteriore, potendosi assumere come tale una qualunque curva algebrica di S_4 che (quale per esempio ogni retta sghemba con r) sia incontrata in un sol punto variabile dagli spazi tangenti a V_3^3 nei punti della r. È chiaro che ciascuna di quelle rigate è razionale, ed incontra V_3^3 lungo la r contata due volte e lungo una curva razionale unisecante le sue generatrici. Fissiamo genericamente quattro rigate R_1, R_2, R_3, R_4 del tipo suddetto, e consideriamo sulla r un generico punto P'. Le generatrici g_1, g_2, g_3, g_4 e g'_1, g'_2, g'_3, g'_4 delle R_1, R_2, R_3, R_4 uscenti rispettivamente da P e da P' costituiscono allora due quaterne di rette a tre a tre indipendenti nelle stelle π e π' formate dalle rette tangenti a V_3^3 in P e P', sicchè fra tali stelle rimane definita un'omografia trasformante g_1, g_2, g_3, g_4 ordinatamente in g'_1, g'_2, g'_3, g'_4. Fissate in π due qualunque rette g, $\bar{g}$, le loro trasformate in tale omografia descrivono — al variare di P' sulla r — due rigate R, $\bar{R}$ del tipo suddetto, contenenti rispettivamente le g, $\bar{g}$; e siano L, $\bar{L}$ le curve razionali secondo cui le R, $\bar{R}$ incontrano V_3^3 fuori di r.

È subito visto che, associando fra loro g e $\bar{g}$ quando le relative L, $\bar{L}$ abbiano in comune un punto che non appartenga a tutte

([4]) Cfr. F. SEVERI, *op. cit.* in ([2]), n. 28.

([5]) G. FANO, *Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche*, « Comment. Pont. Ac. Sc », 11 (1947), 635-720, n. 38.

le rigate provenienti nel modo indicato dalle varie rette di π, si viene a definire in π un'involuzione ∞^3 in senso stretto di coppie di elementi. Quest'involuzione risulta poi irrazionale, in quanto si ottiene un riferimento birazionale fra essa e $V_3{}^3$ col far corrispondere alla sua coppia g, $\bar{g}$ generica il punto (di $V_3{}^3$) comune alle relative curve L, $\bar{L}$.

5. Riferiamoci ad una I_n^4 di un piano π, ed osserviamo che — in base al n. 2 — la I_{n-1}^2 residua rispetto ad essa del generico punto P di π definisce una trasformazione cremoniana involutoria di π, la quale *a priori* può

a) avere il punto P come fondamentale,

oppure

b) non avere il punto P come fondamentale.

Nel caso *a*), inoltre, la curva C che corrisponde a P nella suddetta trasformazione cremoniana può

a_1) non contenere P,

oppure

a_2) passare semplicemente per P,

od infine

a_3) avere in P un punto multiplo.

Notiamo che — in ciascuno degli esempi ottenibili dal primo capoverso del n. 3 per $h=2$ — è il caso a_3) che si presenta; dimostreremo ora la possibilità degli altri tre casi, sicchè gli esempi del n. 3 esauriscono tutte le possibili I_n^{2h} piane per $h=1$ (n. 1), ma non per $h=2$.

Un semplice esempio d'involuzione *presentante il caso b*) si ha considerando, in un piano euclideo π, la totalità delle terne di punti A, B, C aventi un dato baricentro O. Invero è subito visto che tale totalità è una I_3^4. Inoltre, la I_2^2 residua del generico punto P di π rispetto ad essa, consiste delle coppie di punti di π simmetriche rispetto al punto Q della retta OP tale che O divida il segmento PQ nel rapporto $2:1$; e la simmetria rispetto a Q non ammette P come fondamentale.

Rileviamo che la suddetta I_3^4, pur essendo *razionale* (6), non può ottenersi come totalità dei gruppi caratteristici di un sistema li-

(6) Infatti, introdotte in π coordinate cartesiane (x, y) coll'origine in O, il generico G_3 di $I_3{}^4$ può venir rappresentato mediante le equazioni

$$ax^3 + bx + c = 0, \qquad \alpha xy + \beta x + \gamma y + \alpha\beta(3c\alpha - 2b\gamma) / (b\alpha^2 + 3a\gamma^2) = 0,$$

e corrisponde così birazionalmente alle coppie di tre parametri omogenei (a, b, c) ed (α, β, γ).

neare ∞^3 di grado 3 di curve piane, in quanto appunto essa presenta il caso *b*) e non il caso a_3). Più generalmente, *la* I_n^{2n-2} *delle* n-*ple di punti di un piano di dato baricentro* (n ≥ 3). *non può ottenersi come totalità dei gruppi caratteristici di un sistema lineare* ∞^n *di grado* n *di curve piane*, poichè l'involuzione residua rispetto ad essa di un qualunque G_{n-3} del piano risulta una I_3^4 del tipo suddetto.

Fissiamo ora in un S_3 euclideo una quadrica F irriducibile ed un generico punto O, e consideriamo su F le quaterne di punti complanari aventi il baricentro in O. Si vede facilmente che, sulla superficie razionale F. queste quaterne costituiscono una I_4^4. Si ha inoltre che la I_3^2 residua del generico punto P di F, rispetto a tale I_4^4, determina su F una trasformazione birazionale avente un punto fondamentale in P; e precisamente, la curva fondamentale associata a P si ottiene prendendo il punto P' simmetrico di P in O, e segando F col piano per P' parallelo al piano polare di P' rispetto ad F. La sezione piana di F così costruita non contiene generalmente il punto P, eppertanto la suddetta I_4^4 *presenta il caso* a_1).

Prendiamo da ultimo su di un piano euclideo π una rete Σ irriducibile di coniche ed un generico punto O, e consideriamo le quaterne di punti situati sulle varie coniche di Σ ed aventi il baricentro in O. È subito visto che tali quaterne costituiscono, su π, una I_4^4. Inoltre, la I_3^2 residua del generico punto P di π definisce una trasformazione cremoniana involutoria di π che ha il punto P come fondamentale, la relativa curva fondamentale ottenendosi nel modo seguente. Si consideri in π il fascio delle coniche di Σ passanti per P ed il fascio di rette avente per centro il punto P' simmetrico di P in O, e si associno una conica del primo fascio ed una retta del secondo quando questa è parallela alla polare di P' rispetto a quella; il riferimento fra i due fasci risulta manifestamente proiettivo, e fornisce la curva richiesta come luogo delle intersezioni di due curve omologhe di detti fasci. Questo luogo è pertanto una cubica piana passante semplicemente per P, sicchè la I_4^4 considerata *presenta il caso* a_2).