Bollettino Unione Matematica Italiana

Domenico Negri

Risoluzione di sistemi di 3 equazioni di 2° grado in 3 incognite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.2, p. 161–167.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_161_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Risoluzione di sistemi di 3 equazioni di 2° grado in 3 incognite.

Nota di Domenico Negri (a Modena).

Sunto. - *Vengono dati nuovi procedimenti assai semplici per risolvere il sistema di 3 equazioni di 2° grado in 3 incognite dimostrando in pari tempo diversi risultati che sono stati soltanto enunciati dal* Serret *nel suo noto: « Cours d'Algèbre supérieure ».*

1: Nella ben nota opera di J. Serret: *Cours d'Algèbre supérieure*, 4e edit. (Paris, a. 1877) sono determinate nel n. 79 le soluzioni comuni a 3 equazioni di 2° grado con 3 incognite x, y, z, ossia, ciò che equivale, i punti comuni a 3 superficie di 2° ordine comunque assegnate.

Il Serret adopera il metodo di Bézout per formare l'equazione finale di grado 8 nella sola x. il quale richiede dei calcoli assai laboriosi.

Inoltre, nella trattazione del SERRET, molti calcoli sono appena accennati e vari risultati sono dati senza dimostrazione.

In questa Nota riprendo la questione studiata dal SERRET e la risolvo in modo del tutto diverso e più semplice, dimostrando, in pari tempo, alcuni dei risultati enunciati dal SERRET.

Nella mia trattazione si sono rivelate molto utili varie identità vettoriali le quali anche in queste quistioni di natura algebrica hanno dato un contributo assai utile.

2. Consideriamo 3 equazioni di 2° grado con 3 incognite x, y z; possiamo rappresentarle usando le notazioni di SERRET (pag. 168) con

$$(1) \qquad \begin{cases} ay^2 + 2byz + cz^2 + 2dy + 2ez + f = 0 \\ a'y^2 + 2b'yz + c'z^2 + 2d'y + 2e'z + f' = 0 \\ a''y^2 + 2b''yz + c''z + 2d''y + 2e''z + f'' = 0 . \end{cases}$$

ove le a, b, c sono costanti, le d. e sono funzioni di primo grado di x e le f sono funzioni di 2° grado di x.

Per brevità di scrittura porremo, in generale

$$(2) \qquad (\alpha.\ \beta,\ \gamma) = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

ed inoltre porremo col SERRET (pag. 169):

$$(2') \quad \begin{cases} H \quad (a,\ b,\ c), \quad D = (b,\ c,\ d), \quad E = (b,\ c,\ e), \quad F = (b,\ c,\ f), \\ D' = (c,\ a,\ d). \quad E' = (c,\ a,\ e), \quad F' = (c,\ a,\ f), \quad D'' = (a,\ b,\ d), \\ E'' = (a,\ b,\ e), \quad F'' = (a,\ b,\ f); \end{cases}$$

dopo ciò, risolvendo le (1) rispetto ad y^2, yz e z^2 si ha:

$$(3) \qquad \begin{cases} Hy^2 = -2Dy - 2Ez - F \\ 2Hyz = -2D'y - 2E'z - F' \\ Hz^2 = -2D''y - 2E''z - F'', \end{cases}$$

e questo sistema ovviamente è in tutto equivalente al sistema (1).

3. Da questo sistema è facile ricavare 2 equazioni di 1° grado in y e z; a questo scopo osserviamo che moltiplicando la 1ª delle (3) per $2z$ e la 2ª per y, poi sottraendo viene:

$$2D'y^2 + (E' - 2D)2yz - 4Ez^2 + F'y - 2Fz = 0,$$

moltiplicandola per H, poi sostituendo ad Hy^2, $2Hyz$, Hz^2 i valori dati dalle (3) si ha:

$$R'y - 2Rz + Q = 0, \tag{4}$$

ove

$$\begin{aligned} R &= HF + 2(D'E - DE') + (E'^2 - 4EE''), \\ R' &= HF' + 2(4D''E - D'E'), \end{aligned} \tag{5}$$

$$Q = 4EF - E'F' + 2(DF' - D'F). \tag{6}$$

Similmente, moltiplicando la 2ª delle (3) per z e la 3ª per $2y$ e sottraendo, risulta:

$$4D''y^2 + (2E'' - D')2yz - 2E'z^2 + 2F''y - F'z = 0,$$

moltipliplicando per H e tenendo conto delle (3) si trae:

$$-2R''y + R'z + P = 0, \tag{4'}$$

avendo posto

$$R'' = HF'' + 2(D''E' - D'E'') + (D'^2 - 4DD''), \tag{5'}$$

$$P = 4D''F - D'F' + 2(E''F' - E'F''). \tag{6'}$$

Le espressioni di R, R', R'' coincidono con quelle considerate dal Serret (pag. 169), il quale però non ottiene le equazioni lineari (4), (4'), ma introduce altre 3 equazioni di 2° grado assai complesse, che poi trasforma col metodo dl Bézout.

Quanto alle espressioni di P e Q, il Serret le ottiene sotto la forma seguente (pag. 171):

$$\left\{ \begin{aligned} P &= \frac{4D''R + (2E'' - D)R' - 2E'R''}{H}, \\ Q &= \frac{4ER'' + (2D - E')R' - 2D'R}{H}, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

ed afferma, senza peraltro dimostrarlo (pag. 173), che questi due numeratori sono divisibili per H; col nostro procedimento abbiamo invece ottenuto direttamente P, Q sotto la forma intera più semplice, espressa dalle (6), (6'), il che dimostra, tra l'altro, l'asserzione del Serret.

Risolvendo le (4), (4') si ha tosto:

$$y = \frac{2PR + QR'}{R'^2 - 4RR''}, \qquad z = \frac{PR' + 2QR''}{R'^2 - 4RR''}, \tag{8}$$

che coincidono con quelle ottenute, in modo più complicato e indiretto, dal Serret (pag. 174).

4. Si può ottenere facilmente un'altra equazione lineare in y e z nel modo seguente; dalla (4') si ricava:

$$2Py - 4R''y^2 + 2R'yz = 0,$$

moltiplicando per H e tenendo conto delle (3) risulta:

(8') $2(PH + 4DR'' - D'R')y + 2(4ER'' - E'R')z + 4R''F - R'F' = 0,$

che è l'equazione che volevamo ettenere.

Poichè le (4), (4'), (8') coesistono, deve essere:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} R' & -2R & Q \\ -2R'' & R' & P \\ 2PH + 8DR'' - 2D'R' & 8ER'' - 2E'R' & 4R''F - R'F' \end{vmatrix} = 0,$$

che è il risultante cercato delle equazioni (1).

Dalle (5), (5') tenuto conto delle (2), risulta che R, R', R'' sono funzioni di 2° grado di x, mentre le P, Q, come segue dalle (6), (6') sono funzioni di 3° grado di x, perciò il determinante precedente è una funzione di 8° grado di x, in armonia col teorema di BÉZOUT.

Il determinante precedente può semplificarsi nel modo seguente: alla 3ª orizzontale aggiungiamo la 2ª moltiplicata per $4D$ e la 1ª moltiplicata per $2D'$, allora gli elementi della 3ª orizzontale diventano

$$2PH, \quad 8ER'' - 4D'R + 2(2D - E')R', \quad 4R''F - R'F' + 4DP + 2D'Q;$$

tenendo poi conto delle (5), (5') si riconosce tosto che il secondo di questi elementi vale $2QH$ — ciò risulta pure senz'altro dalla 2ª delle (7) — perciò il risultante (9) diventa:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} R' & -2R & Q \\ -2R'' & R' & P \\ 2PH & 2QH & 4R''F - R'F' + 4DP + 2D'Q \end{vmatrix}$$

5. È facile dimostrare che l'espressione

$$(11) \qquad 4R''F - R'F' + 4DP + 2D'Q,$$

è divisibile per H; infatti, applicando le (5), (5'), (6), (6') essa diventa:

$$H(4FF'' - F'^2) - 8[F(D'E'' - E'D'') + F'(D''E - E''D) + F''(DE' - ED')],$$

ossia:

$$(11') \qquad H(4FF'' - F'^2) - 8 \begin{vmatrix} D & E & F \\ D' & E' & F' \\ D'' & E'' & F'' \end{vmatrix};$$

ora dalla nota identità vettoriale [1]

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u} \times \mathbf{d} & \mathbf{u} \times \mathbf{e} & \mathbf{u} \times \mathbf{f} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{d} & \mathbf{v} \times \mathbf{e} & \mathbf{v} \times \mathbf{f} \\ \mathbf{w} \times \mathbf{d} & \mathbf{w} \times \mathbf{e} & \mathbf{w} \times \mathbf{f} \end{vmatrix} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot \mathbf{d} \wedge \mathbf{e} \times \mathbf{f},$$

[1] C. BURALI e R. MARCOLONGO, *Elementi di Calcolo vettoriale*, 2ª ediz., a. 1921, pagg. 33.

si deduce:

$$\begin{vmatrix} b\wedge c\times d & b\wedge c\times e & b\wedge c\times f \\ c\wedge a\times d & c\wedge a\times e & c\wedge a\times f \\ a\wedge b\times d & a\wedge b\times e & a\wedge b\times f \end{vmatrix} = [(b\wedge c)\wedge(c\wedge a)]\times(a\wedge b)\cdot d\wedge e\times f,$$

ed il 2° membro, sviluppando il doppio prodotto vettoriale, equivale a:

$$(b\wedge c\times a\cdot c)\times a\wedge b\cdot d\wedge e\times f,$$

cioè:

$$(a\wedge b\times c)^2\cdot d\wedge e\times f.$$

Se ora supponiamo che i vettori a, b, c, d, e, f abbiano per componenti rispettivamente:

$$a,\ a',\ a'';\quad b,\ b',\ b'';\quad c,\ c',\ c'',\ldots,$$

e si osserva che con le notazioni (2), (2') si ha ad es. da note formule:

$$b\wedge c\times d=(b,\ c,\ d)=D;\quad b\wedge c\times e=(b,\ c,\ e)=E;\ \ldots$$

ne segue che la formula precedente porge:

$$\begin{vmatrix} D & E & F \\ D' & E' & F' \\ D'' & E'' & F'' \end{vmatrix} = H^2(d,\ e,\ f),$$

perciò la (11') diventa

$$H[4FF''-F'^2-8H(d,\ e,\ f)],$$

onde il risultante può scriversi

$$(10')\qquad \begin{vmatrix} R' & 2R & -Q \\ -2R'' & R' & -P \\ 2P & 2Q & N \end{vmatrix} = 0,$$

avendo posto per brevità:

$$(12)\qquad N=F'^2-4FF''+8H(d,\ e,\ f).$$

Il SERRET introduce in modo del tutto diverso la quantità N definendola mediante la eguaglianza assai complessa (pag. 172):

$$H^2N=4(D'^2-4DD'')R+4(D'E'-2DE''-2D''E)R'+$$
$$+4(E'^2-4EE'')R''+(R'^2-4RR'')$$

e poi afferma, senza dimostrarlo (pag. 173), che questo secondo membro deve essere divisibile per H^2; l'espressione (12) da noi ottenuta per N (e che si può verificare facilmente che coincide con quella data dalla formula precedente) dimostra l'asserzione del SERRET.

La (10') non differisce dalla (19) data dal SERRET (pag. 173).

6. Il SERRET afferma ancora, senza peraltro dimostrarlo (pag. 173) che il 1° membro della (10′) è divisibile per H^2.

Noi possiamo dimostrare questa notevole proposizione nel modo seguente. Considerando la (10′) (il cui primo membro verrà indicato con Θ) moltiplichiamo la 1ª orizzontale per D e da essa togliamo la 2ª moltiplicata per E; avremo:

$$D\Theta = \begin{vmatrix} DR' + 2ER'' & -DR - ER' & EP - DQ \\ 2R'' & R' & -P \\ 2P & 2Q & N \end{vmatrix};$$

moltiplichiamo ora la 2ª orizzontale per F e da essa sottragghiamo la 3ª moltiplicata per D; risulterà:

$$(13)\quad DF\Theta = \begin{vmatrix} DR' + 2ER'' & -(2DR + ER'') & EP - DQ \\ -2(R''F + DP) & FR' - 2DQ & -(FP + DN) \\ 2P & 2Q & N \end{vmatrix};$$

facciamo ora vedere che i vari elementi delle prime due orizzontali contengono il fattore H e per questo è utile stabilire alcune formule preliminari. Si ha:

$$DE' - ED' = (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{d} \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{e} - (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{d},$$

ossia, per una formula di calcolo vettoriale (*Op. cit.*, pag. 33),

$$DE' - ED' = [(\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) \wedge (\boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{a})] \times (\boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{e}),$$

od ancora, sviluppando il doppio prodotto vettoriale:

$$DE' - ED' = (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{e},$$

ossia:

$$(14)\qquad DE' - ED' = H\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{e},$$

ed è chiaro che il prodotto $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{e}$ è uguale al determinante rappresentato, in base alla (2), dal simbolo (c, d, e)—.

Analogamente

$$(14')\quad \begin{cases} D'E'' - E'D'' = H\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{e}; \quad D''E - E''D = H\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{e}; \\ DF' - FD' = H\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{f}; \quad D'F'' - F'D'' = H\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{f} \\ D''F - F''D = H\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{d} \wedge \boldsymbol{f}; \quad E'F'' - F'E'' = H\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e} \wedge \boldsymbol{f}. \end{cases}$$

Ciò premesso, dalle (5), (5′) sisulta:

$$DR' + 2ER'' = H(DF' + 2EF'') - 2D'(DE' - ED') - 4E(D'E'' - E'D''),$$
$$2DR + ER' = H(2DF + EF') - 4D(DE' - ED') + 2E'(DE' - ED) + $$
$$+ 8E(D''E - E''D),$$

$$EP - DQ = 4E(D''F - F''D) - 2D(DF' - FD') + F'(DE' - ED') -$$
$$- 2E(E'F'' - F'E''),$$
$$FR'' + DP = HFF'' - 2F(D'E'' - E'D'') - D'(DF' - FD') -$$
$$- 2D(E'F'' - F'E''),$$
$$FR' - 2DQ = HFF' + 8E(D''F - F''D) + 2E'(DF' - FD') -$$
$$- 4D(DF' - FD'),$$
$$FP + DN = 4F(D''F - F''D) - 2F(E'F'' - F'E'') + F'(DF' - FD') +$$
$$+ 8HD(d, e, f),$$

e dalle (14), (14′) si conclude appunto che le prime due orizzontali del determinante (13) contengono il fattore H, e perciò la (13) può scriversi sotto la forma:

$$DF\Theta = H^2\Phi,$$

ove Φ è funzione intera dei coefficienti a, b, c,.... che figurano nella (1).

E poichè è evidente che il prodotto DF non è divisibile per H, ne segue che Θ deve essere divisibile per H^2 come affermò il SERRET.

Ora è chiaro che il determinante (10′) è funzione intera ed omogenea di grado 18 dei coefficienti a, b, c.... delle (1) e dopo effettuata la divisione per H^2 rimane una funzione intera ed omogenea di grado 12 dei coefficienti delle (1), la quale è di grado 8 nella variabile x; essa è il risultante delle (1) nella forma più semplice possibile.