ASSUNTA DE BONO

Trasformazioni cremoniane reali tra piani con speciale riguardo a quelle di ordine ≤ 5

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.2, p. 128–135.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_128_0>

Trasformazioni cremoniane reali tra piani con speciale riguardo a quelle di ordine ≤ 5.

Nota di ASSUNTA DE BONO (a Pavia).

Sunto - *Si studiano, sotto l'aspetto della topologia del piano proiettivo, le trasformazioni cremoniane reali fra piani ed in particolare, con criteri di classificazione, quelle di ordine ≤ 5.*

1. A partire dai classici lavori di LUIGI CREMONA che posero le basi di una teoria delle trasformazioni cremoniane nel piano, molte furono le ricerche dirette ad apportarle complementi ed a svolgerne le applicazioni (1).

Tuttavia tra tali studi ebbero ben scarso sviluppo quelli concernenti questioni di realità (2). Questi possono trovare peraltro

(7) Qualora ci si voglia limitare ad affermare che:

$$g(x) \geq \gamma(x) \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq b \quad \text{se} \quad y_0 \geq \gamma(x_0)$$
$$g(x) \leq \gamma(x) \quad \text{per} \quad a \leq x \leq x_0 \quad \text{se} \quad y_0 \leq \gamma(x_0),$$

come appare evidente dalla dimostrazione, non occorre supporre $\psi(x)$ decrescente. In questo caso, per le (2) e (3), $\psi(x)$ risulterà non crescente.

(1) Per notizie e riferimenti bibliografici cfr. l'ampio articolo di L. BERZOLARI, *Algebraische Transformationen und Korrespondenzen* « Encyclop. der Math. Wissensch. III, 2, » pag. 1781-2218, specialmente pag. 1954-2037.

(2) Prescindendo da trattazioni elementari sulle trasformazioni cremoniane quadratiche, e da accenni occasionali, si può qui ricordare la Nota

qualche riscontro con vedute generali esposte da FELICE KLEIN [3] e da FEDERIGO ENRIQUES [4] in questioni analoghe.

Nella mia dissertazione di laurea [5] mi sono proposto uno studio sistematico delle trasformazioni cremoniane piane reali *(a punti fondamentali distinti)*, col preciso scopo di studiarle sotto l'aspetto della topologia del piano proiettivo.

Poichè la relativa pubblicazione non si presenterebbe agevole per l'estensione stessa del lavoro e per la necessità di largamente illustrarlo con figure, credo opportuno di riferirne sommariamente i risultati ed i metodi nella presente Nota.

2. Si sono stabilite alcune generalità sull'argomento, nelle quali ha larga parte l'intervento di reticolazioni distese sul piano proiettivo o su regioni del tipo "pezzo" (cellula bidimensionale), sempre provenienti dall'introduzione degli elementi (punti e curve) fondamentali reali in ciascuno dei due piani, indi sono state studiate in modo approfondito le trasformazioni cremoniane reali fino all'ordine $n = 5$ incluso, con speciale riguardo alla determinazione dei casi topologicamente distinti, nell'intento di fornire così più concreta notizia sull'indole del problema generale.

Si presentano in primo luogo i due noti casi di *trasformazione cremoniana quadratica reale*

$$\Gamma^2 \equiv (ABC), \qquad \Gamma^2 \equiv (AB\bar{B}),$$

ed i tre di *trasformazione cremoniana cubica reale*

$$\Gamma^3 \equiv (A^2BCDE); \qquad \Gamma^3 \equiv (A^2BCD\bar{D}); \qquad \Gamma^3 \equiv (A^2B\bar{B}D\bar{D}),$$

ciascuno dei quali si ripete anche per la trasformazione inversa, intendendo, qui come sempre, di indicare con singole lettere non sopralineate punti reali, e colla stessa lettera priva o dotata di

di E. CARNEVALI, *Trasformazione cremoniana reale di una curva piana algebrica reale in un'altra dotata di sole singolarità ordinarie.* « Rend. Ist. Lomb. 66 (1933) » pag. 434-438.

(3) F. KLEIN. *Bemerkungen über der Flächen.* « Math. Ann., 7, (1874), 9 (1875-1876) », o, meglio, *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, 2 (Berlin 1922) pag. 63-77, specialmente pag. 70.

(4) F. ENRIQUES. *Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali.* « Rend. R. Acc. Bologna. 16 (1912) » pag. 70-73.

(5) *Trasformazioni cremoniane reali fra piani.* Pavia - 1945-1946.

soprassegno i due elementi di una coppia di punti immaginario-coniugati.

3. Si passa quindi allo studio delle *trasformazioni cremoniane reali del quarto ordine*, che si presentano in due tipi:

Il *primo (trasformazioni di* De Jonquieres*)* offre quattro alternative:

(1) $\Gamma^4 \equiv (A^3BCDEFG)$ (3) $\Gamma^4 \equiv (A^3BCD\bar{D}F\bar{F})$

(2) $\Gamma^4 \equiv (A^3BCDEF\bar{F})$ (4) $\Gamma^4 \equiv (A^3B\bar{B}D\bar{D}F\bar{F})$

ciascuna delle quali dà luogo a due eventualità, a seconda che A sia punto doppio nodale o punto doppio isolato per la cubica fondamentale: nella prima nasce una distinzione in casi relativa alla distribuzione dei punti fondamentali semplici tra serpentino e cappio della cubica fondamentale. Si indicherà con $[h, k]$, essendo $k = 6 - h$, il caso in cui sul serpentino (risp. sul cappio) si hanno h (risp. k) punti fondamentali semplici. I casi sono, rispettivamente, otto, sei, quattro, due.

Il comportamento delle trasformazioni inverse offre qui maggior interesse, perchè, nelle prime tre alternative della prima eventualità, per la prima volta si presenta la circostanza che non sempre la trasformazione inversa appartiene allo stesso caso della diretta (appartiene però alla stessa alternativa). Precisamente l'inversa di una trasformazione $[h, k]$ è una $[h, k]$ oppure una $[k, h]$, secondo che h, k siano o entrambi pari od entrambi dispari.

Per stabilire, qui ed altrove, quali tipi si riferiscano a trasformazioni inverse, ci si può valere dell'osservazione che la corrispondenza biunivoca tra le reticolazioni distese p. es. sui due piani proiettivi è tale che a facce limitrofe corrispondano facce opposte al vertice, intendendosi per facce limitrofe facce i cui contorni abbiano almeno un lato comune, e, per facce opposte al vertice, facce che nell'intorno di un vertice comune contengano le direzioni pertinenti ad uno stesso segmento del fascio avente ivi il centro.

4. Il *secondo tipo di trasformazioni cremoniane reali del quarto ordine* dà luogo a quattro alternative

(1) $\Gamma^4 \equiv (A^2B^2C^2DEF)$ (3) $\Gamma^4 \equiv (A^2B^2C^2DE\bar{E})$

(2) $\Gamma^4 \equiv (A^2B^2\bar{B}^2DEF)$ (4) $\Gamma^4 \equiv (A^2B^2\bar{B}^2DE\bar{E})$.

Per stabilire la distinzione in casi nella prima alternativa, risulta conveniente introdurre la conica fondamentale individuata dai cinque punti $ABCDE$ e la reticolazione del piano proiettivo determinata da essa e dai lati del pentagono completo $ABCDE$.

Per ciascuna delle due eventualità, rispondenti (con opportuna scelta delle lettere) agli ordinamenti

$$A^2\ B^2\ C^2\ D\ E; \qquad A^2\ D\ B^2\ E\ C^2$$

sulla conica, la scelta delle regioni in cui giaccia il sesto punto fondamentale F dà luogo a ventun posizioni essenzialmente distinte. Ma per scambio d'ufficio tra punti fondamentali, i quarantadue casi riduconsi a soli diciassette distinti per la reticolazione prodotta nel piano proiettivo da coniche e rette fondamentali. Per la classificazione non sempre basta la conoscenza del numero delle regioni con assegnato numero di lati, intervenendo talora essenzialmente anche i loro mutui rapporti di adiacenza.

Dei diciassette casi, cinque si ripetono nella trasformazione inversa, mentre i rimanenti dodici si distribuiscono in sei coppie relative a casi di trasformazioni inverse.

Nella seconda alternativa, trasportando con una collineazione reale i punti fondamentali doppi immaginario-coniugati nei punti ciclici, le coniche fondamentali si riducono a cerchi e le rette fondamentali si riducono a due rette isotrope e all'impropria.

Dall'esame della mutua posizione dei tre cerchi fondamentali (aventi in comune l'unico punto fondamentale doppio reale), nascono, per la seconda alternativa, tre casi distinti.

Similmente, assunti nella terza alternativa come punti fondamentali semplici immaginario-coniugati i punti ciclici, l'unica conica fondamentale reale risulta essere un cerchio, sul quale si troveranno i tre punti fondamentali doppi.

Considerata la reticolazione del piano proiettivo prodotta dal cerchio e dalle rette fondamentali, la posizione dell'unico punto fondamentale semplice reale, dà luogo a tre distinti casi della terza alternativa.

I tre casi della seconda alternativa possono riferirsi ai tre della terza in modo che casi corrispondenti spettino a trasformazioni inverse.

Per le une e le altre le regioni prodotte dalle coniche e rette fondamentali sul piano proiettivo sono tutte del tipo « pezzo », salvo una a due orli, uno dei quali è un circuito poligonale mentre l'altro nella prima alternativa è fornito dalla retta fondamentale reale contata due volte e nella seconda alternativa dall'unico punto fondamentale semplice come punto isolato.

La quarta alternativa presenta due soli casi (punto fondamentale semplice reale esterno o rispettivamente interno all'unica conica fondamentale reale) e ciascuno si ripete nella trasformazione inversa.

5. Il *primo tipo delle trasformazioni cremoniane reali del quinto ordine*, o trasformazioni di DE JONQUIERES, offre subito tre eventualità a seconda della forma della quartica fondamentale, e precisamente:
prima eventualità: la quartica fondamentale presenti nel punto triplo un ramo reale e due immaginario-coniugati;
seconda eventualità: la quartica fondamentale abbia, nel punto triplo, tutti i rami reali, coi tre circuiti parziali tutti pari;
terza eventualità: la quartica fondamentale abbia, nel punto triplo, tutti i rami reali, con due circuiti parziali dispari ed uno pari.

Ciascuna eventualità, a sua volta, dà luogo a cinque alternative:

(1) $\Gamma^5 \equiv (A^4BCDEFGHI)$; (3) $\Gamma^5 \equiv (A^4BCDEF\bar{F}H\bar{H})$;

(2) $\Gamma^5 \equiv (A^4BCDEFGH\bar{H})$; (4) $\Gamma^5 \equiv (A^4BCD\bar{D}F\bar{F}H\bar{H})$;

(5) $\Gamma^5 \equiv (A^5B\bar{B}D\bar{D}F\bar{F}H\bar{H})$.

La prima eventualità per ogni alternativa dà luogo ad un sol caso che si ripete anche nella trasformazione inversa.

La seconda eventualità dà luogo per le singole alternative rispettivamente a

10, 7, 4, 2, 1

casi (complessivamente ventiquattro), la terza rispettivamente a

25, 16, 9, 4, 1

(complessivamente cinquantacinque), ogni volta in relazione alla distribuzione dei punti fondamentali semplici sui detti circuiti parziali.

Per quanto riguarda le coppie di trasformazioni inverse conviene che la seconda e la terza eventualità siano esaminate insieme. Precisamente:

I. In entrambe le eventualità si ripete nella trasformazione inversa ciascuno dei casi per cui è pari il numero dei punti fondamentali su ciascun circuito parziale.

II. Nella terza eventualità si distribuiscono in coppie di trasformazioni inverse i casi per cui è dispari il numero dei punti fondamentali semplici giacenti sul circuito parziale pari (onde ne cadono con numeri di parità diversa sui due circuiti parziali dispari).

III. I casi della seconda eventualità per cui è pari il numero dei punti fondamentali semplici su uno solo dei circuiti parziali, trovano come casi delle trasformazioni inverse, rispettivamente quelli della terza per cui è pari il numero dei punti fondamentali semplici sul solo circuito parziale pari.

6. *Il secondo tipo di trasformazioni cremoniane reali del quinto ordine* presenta quattro alternative:

(1) $\Gamma^5 \equiv (A^2B^2C^2D^2E^2F^2)$ (3) $\Gamma^5 \equiv (A^2B^2C^2\overline{C}^2E^2\overline{E}^2)$

(2) $\Gamma^5 \equiv (A^2B^2C^2D^2E^2\overline{E}^2)$ (4) $\Gamma^5 \equiv (A^2\overline{A}^2C^2\overline{C}^2E^2\overline{E}^2)$.

Per determinare tutti i casi possibili della prima alternativa si assumono su una delle sei coniche fondamentali i cinque punti fondamentali doppi che la individuano; si conducono tutte le rette che congiungono i cinque punti a due a due e quindi si fanno assumere al sesto punto fondamentale doppio le otto posizioni essenzialmente distinte nelle regioni così determinate dalla conica e dalle rette fondamentali, dando però luogo a soli quattro casi distinti, ciascuno dei quali si ripete nella trasformazione inversa.

Nella seconda alternativa si presentano due casi, in quanto il fascio di coniche avente per punti-base i quattro fondamentali reali segni sulla congiungente i due immaginario-coniugati una involuzione iperbolica od ellittica. Ciascun caso si ripete nella trasformazione inversa.

La terza alternativa presenta un sol caso e supposto che due dei punti immaginario-coniugati coincidano coi punti ciclici le due coniche fondamentali reali si riducono a circonferenze, separate dall'asse radicale, sul quale sta l'altra coppia di punti immaginario-coniugati.

Nella quarta alternativa risultano immaginari nei due piani della trasformazione tutti gli elementi fondamentali, e allora la corrispondenza nel campo reale risulta biunivoca senza eccezione ed, in entrambi i piani, la rete omaloidica di quintiche risulta topologicamente identica a quella delle rette.

Quindi la trasformazione cremoniana del quinto ordine priva di elementi eccezionali reali è topologicamente identificabile con una collineazione reale (6).

7. *Il terzo tipo di trasformazioni cremoniane reali del quinto*

(6) Indicandola con Ω, si ha che il prodotto di più trasformazioni Ω è ancora una trasformazione cremoniana priva di elementi eccezionali reali, di un ordine che può supporsi elevato quanto si vuole, ma tale trasformazione prodotto è sempre topologicamente identificabile con una collineazione reale.

ordine presenta quattro alternative:

(1) $\Gamma^5 \equiv (A^3B^2C^2D^2EFG)$ (3) $\Gamma^5 \equiv (A^3B^2C^2\bar{C}^2EFG)$;

(2) $\Gamma^5 \equiv (A^3B^2C^2D^2EF\bar{F})$ (4) $\Gamma^5 \equiv (A^3B^2C^2\bar{C}^2EF\bar{F})$.

In ciascuna alternativa sono da distinguere due eventualità, secondo che A sia punto doppio nodale o punto doppio isolato per la cubica fondamentale.

Nella prima eventualità della prima alternativa nasce una distinzione preliminare in settantacinque casi, relativa alla posizione dei punti fondamentali doppi e fondamentali semplici sul cappio e sul serpentino di detta cubica. Una esauriente classificazione richiederebbe ulteriori considerazioni, che condurrebbero ad un notevole numero di casi; nella mia dissertazione mi sono quindi limitata a qualche esemplificazione più significativa.

Nella seconda eventualità basta tener presente in un primo tempo la mutua posizione dei punti fondamentali doppi e semplici sul serpentino, per cui si hanno i tre casi

$$\begin{array}{cccccc} d & d & d & s & s & s \\ d & d & s & s & d & s \\ d & s & d & s & d & s \end{array}$$

(indicando rispettivamente con d ed s i punti fondamentali doppi e semplici). Ma ulteriori considerazioni porterebbero ad un numero eccessivo di casi, per cui anche qui mi sono limitata ad esemplificare.

Per le coppie di trasformazioni inverse basti richiamare l'affermazione che l'inversa di una trasformazione di prima alternativa è pure di prima alternativa e anzi che ognuna delle due relative eventualità ritorna in sè.

Nella prima eventualità della seconda alternativa per le ulteriori suddivisioni si è proceduto nel modo seguente. Delle coniche fondamentali una sola è reale; assunti su di essa i cinque punti fondamentali reali, sceltone uno quale punto triplo A, si è determinato l'andamento della cubica fondamentale in modo che i rimanenti quattro punti fondamentali reali risultino o sul serpentino, o sul cappio, o parte sul serpentino e parte sul cappio. Introdotta sul serpentino l'unica intersezione reale J della cubica con la retta congiungente i due punti fondamentali immaginario-coniugati (che posso sempre supporre coincidente con la retta impropria), allora il serpentino dal suo punto angolare A e dal suo punto improprio J sarà diviso in due « segmenti ».

Indicando con $[h, k, l]$ il caso in cui dei punti fondamentali reali rispettivamente h, l sono sui due segmenti del serpentino e k sul cappio, si hanno le seguenti nove possibilità:

$$\begin{array}{ccc} [4,\ 0,\ 0] & & [2,\ 1,\ 1] \\ [3,\ 1,\ 0] & & [1,\ 3,\ 0] \\ [2,\ 2,\ 0] & & [1,\ 0,\ 3] \\ [2,\ 0,\ 2] & & [1,\ 2,\ 1] \\ & [0,\ 4,\ 0] & \end{array}$$

Per ognuna di tali possibilità si distinguono inoltre i casi relativi all'unico punto fondamentale semplice reale rispetto ai tre fondamentali doppi reali. Si ottengono in tal modo trenta casi distinti, caratterizzati dal numero delle facce j-gonali che intervengono nella reticolazione, ed, eventualmente, dalle loro mutue adiacenze.

Procedendo analogamente nella seconda eventualità di A punto doppio isolato, si ottengono due soli casi distinti.

Si passa quindi alla terza alternativa. Nella prima eventualità, per le ulteriori suddivisioni, assunta la cubica fondamentale si distinguono tutte le possibilità, relative alla distribuzione dei punti fondamentali semplici e doppio sul circuito della cubica, e per ciascuno tutti i casi relativi all'ordinamento che tali punti assumono, anche nei riguardi dell'unico punto reale H, in cui la cubica taglia la congiungente i due punti immaginario-coniugati (la quale potrà sempre supporsi coincidente con la retta impropria). Si ottengono in tal modo trenta casi distinti.

Nella seconda eventualità la cubica ha punto isolato e similmente si ottengono due soli casi distinti.

Per le coppie di trasformazioni inverse si deduce facilmente che se la trasformazione diretta è della seconda alternativa, l'inversa è della terza (e reciprocamente); naturalmente saranno tra loro corrispondenti i casi di eguale eventualità.

Resta ancora da trattare la quarta alternativa nella quale la prima eventualità dà luogo a quattro casi distinti, ottenuti assumendo il punto fondamentale doppio reale e quello fondamentale semplice reale in tutti i modi possibili sui circuiti parziali della cubica fondamentale. Di tali casi due sono corrispondenti di sè stessi nella trasformazione inversa, e due si corrispondono tra loro.

La seconda eventualità si riduce ad un solo caso, corrispondente di sè stesso nella trasformazione inversa.