BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FEDERICO CAFIERO

Su due teoremi di confronto relativi ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3
(1948), n.2, p. 124–128.

Zanichelli

http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_124_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Su due teoremi di confronto relativi
ad un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine.**

Nota di FEDERICO CAPTERO (a Napoli).

Sunto. - *Si dà una nuova semplice dimostrazione di due teoremi di confronto relativi all'equazione $y' = f(x, y)$.*

In una recente Nota ⁽¹⁾, BAJADA enuncia fra l'altro due teoremi di confronto relativi all'equazione differenziale $y' = f(x, y)$ e ne dà una dimostrazione basata essenzialmente su di un procedi-

⁽¹⁾ E. BAJADA, *Confronto e dipendenza dai parametri degli integrali delle equazioni differenziali*. Nota I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », s. VIII, vol. III, pp. 258-271, (1947).

mento ⁽²⁾ elaborato da TONELLI per la risoluzione delle equazioni funzionali del tipo VOLTERRA e su procedimenti ⁽³⁾ suoi, relativi all'approssimazione delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine. Tali dimostrazioni, certamente non prive d'interesse perchè condotte con ragionamenti diretti, sono alquanto complesse e laboriose malgrado l'ipotesi della continuità di $f(x, y)$ in cui per semplicità si mette BAJADA. In questa Nota, mettendomi nelle ipotesi più ampie di CARATHÉODORI, do una nuova semplice dimostrazione di tali criteri di confronto.

N. 1. - Il primo dei teoremi di confronto dimostrati da BAJADA si può mettere nella forma seguente:

A) Sia $f(x, y)$ misurabile rispetto ad x , continua rispetto ad y nella striscia:

$$S: x_0 \leq x \leq x_0 + a, \quad -\infty < y < +\infty \quad (a > 0)$$

ed ivi soddisfi alla limitazione:

$$(1) \quad |f(x, y)| \leq q(x)$$

con $q(x)$ sommabile (nel senso di Lebesgue) in $(x_0, x_0 + a)$. Allora se $\gamma(x)$ è continua e soddisfa alla disuguaglianza integrale:

$$(I) \quad \gamma(x) \leq \gamma(\xi) + \int_{\xi}^x f(t, \gamma(t)) dt \quad x_0 \leq \xi \leq x \leq x_0 + a,$$

esiste almeno una soluzione $g(x)$ dell'equazione integrale in y :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, t) dt \quad y_0 \geq \gamma(x_0)$$

soddisfacente alla limitazione $g(x) \geq \gamma(x)$ in tutto $(x_0, x_0 + a)$.

Allo scopo di dimostrare il teorema enunciato, introduciamo la funzione:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{per } \gamma(x) \leq y \\ f(x, \gamma(x)) & \text{per } \gamma(x) > y \end{cases}$$

definita nella striscia S , ivi misurabile rispetto ad x , continua rispetto ad y e per la (1) soddisfacente alla limitazione:

$$|F(x, y)| \leq q(x).$$

⁽²⁾ L. TONELLI, *Sulle equazioni funzionali del tipo Volterra*. « Bull. Calcutta Math. Society », 20, (1928), pp. 31-48.

⁽³⁾ E. BAJADA, *Le approssimazioni successive e gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*. Nota I, « Rend. Acc. Naz. Lincei », s. VIII, vol. II, (1947), pp. 261-268.

Ciò posto consideriamo l'equazione integrale in y :

$$(II) \quad y = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, y) dt \quad y_0 \geq \gamma(x_0).$$

Orbene, faremo vedere, ciò che dimostra l'asserto, che ogni soluzione $g(x)$ (4) della (II) soddisfa alla limitazione:

$$g(x) \geq \gamma(x) \quad x_0 \leq x \leq x_0 + a.$$

Infatti la superiore limitazione è per supposto soddisfatta in x_0 e quindi se ci fosse un punto ξ a destra di x_0 in cui $g(\xi) < \gamma(\xi)$, detto (ξ_1, ξ_2) il massimo intervallo, contenente ξ , nell'interno del quale risulta $g(x) < \gamma(x)$, sarebbe $g(\xi_1) = \gamma(\xi_1)$. Per x interno a (ξ_1, ξ_2) risulterebbe quindi:

$$\gamma(x) > g(x) = g(\xi_1) + \int_{\xi_1}^x F(t, g(t)) dt = \gamma(\xi_1) + \int_{\xi_1}^x f(t, \gamma(t)) dt.$$

Ma ciò è assurdo perchè per ipotesi $\gamma(x)$ soddisfa alla (I) (5).

N. 2. - Passiamo ora alla dimostrazione del secondo teorema di confronto che, a prescindere dalle ipotesi più generali in cui ci siamo messi, è il seguente:

B) Sia $f(x, y)$ misurabile rispetto ad x , continua rispetto ad y nella striscia:

$$S_1: a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < +\infty$$

ed ivi soddisfi alla limitazione (1). Sia inoltre $\psi(x)$ continua, decrescente in (a, b) e soddisfi alla condizione:

i) Per ogni punto (ξ_1, η) di S_1 si possono determinare due numeri positivi δ_1 e δ_2 in modo tale che:

$$(2) \quad \psi(\xi_1) - \psi(x) \geq \int_{\xi_1}^x \text{Max}_{y_1, y_2} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| dt \quad \text{per } \xi_1 \leq x \leq \xi_1 + \delta_1$$

$$(3) \quad \psi(\xi_1) - \psi(x) \leq \int_{\xi_1}^x \text{Max}_{y_1, y_2} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| dt \quad \text{per } \xi_1 - \delta_1 \leq x \leq \xi_1$$

(4) Nelle ipotesi in cui ci siamo posti ne esiste almeno una ed il suo campo di esistenza e di ogni altra eventuale è tutto $(x_0, x_0 + a)$. Cfr. G. SANSONE, *Le equazioni differenziali nel campo reale*. Zanichelli, Bologna. Parte II, p. 129.

Il teorema ivi riportato è di CARATHÉODORY, *Vorlesungen über Reelle Funktionen*. « Zwaite Auflage ». Berlin, (1927), pp. 665-674.

(5) Nella dimostrazione del teorema A) abbiamo fruito di un ragionamento di G. SCORZA DRAGONI. Cfr.: *Sugli integrali dei sistemi di equazioni differenziali*, « Ist. Lombardo di Scienze e Lettere », vol. 64, fasc. XI-XV, (1931), p. 661.

dove il massimo è, per ogni x , determinato nel dominio ⁽⁶⁾:

$$|\eta - y_1| \leq \delta_2, \quad |\eta - y_2| \leq \delta_2.$$

Allora se $\gamma(x)$ è continua e soddisfa in (a, b) all'equazione:

$$\gamma(x) = \psi(x) + \int_{x_0}^x f(t, \gamma(t))dt \quad a < x_0 < b,$$

ogni soluzione $g(x)$ dell'equazione integrale in y :

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y)dt$$

soddisfa alle limitazioni:

$$\begin{array}{llll} g(x) > \gamma(x) & \text{per} & x_0 < x \leq b & \text{se} & y_0 \geq \gamma(x_0) \\ g(x) < \gamma(x) & \text{per} & a \leq x < x_0 & \text{se} & y_0 \leq \gamma(x_0). \end{array}$$

Cominciamo col dimostrare che:

$$(4) \quad g(x) \geq \gamma(x) \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq b \quad \text{se} \quad y_0 \geq \gamma(x_0).$$

Se infatti ci fosse a destra di x_0 un punto ξ in cui $g(\xi) < \gamma(\xi)$, poichè la superiore limitazione è per supposto verificata in x_0 , detto (ξ_1, ξ_2) il massimo intervallo, contenente ξ , nell'interno del quale risulta $g(x) < \gamma(x)$, sarebbe $g(\xi_1) = \gamma(\xi_1)$. Per x interno a (ξ_1, ξ_2) risulterebbe quindi:

$$\gamma(x) - g(x) = \int_{\xi_1}^x [f(t, \gamma(t)) - f(t, g(t))]dt + \psi(x) - \psi(\xi_1) > 0$$

e cioè:

$$\psi(\xi_1) - \psi(x) < \int_{\xi_1}^x [f(t, \gamma(t)) - f(t, g(t))]dt \quad \xi_1 < x < \xi_2.$$

Ma ciò è assurdo per la (2).

Analogamente si dimostra che:

$$(5) \quad g(x) \leq \gamma(x) \quad \text{per} \quad a \leq x \leq x_0 \quad \text{se} \quad y_0 \leq \gamma(x_0).$$

Se ora ci fosse un punto ξ , per fissare le idee a destra di x_0 , in

⁽⁶⁾ La funzione della variabile x : $\text{Max} |f(x, y_1) - f(x, y_2)|$ ($b_1 \leq y_1 \leq b_2$, $c_1 \leq y_2 \leq c_2$) è misurabile in (a, b) e quindi per la (1) sommabile. Cfr. L. CESARI, *Sul teorema di densità in senso forte*. « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa », s. II, vol. VIII, (1938), pp. 301-307, nota ⁽¹³⁾. Cfr. anche L. TIBALDO, *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », s. VIII, vol. II, (1947), pp. 146-152.

cui $g(\xi) = \gamma(\xi)$, poichè le (5) vale comunque si prenda x_0 in (a, b) , risulterebbe:

$$g(x) \leq \gamma(x) \quad \text{per} \quad a \leq x \leq \xi,$$

ciò che per la (4) porterebbe:

$$g(x) \equiv \gamma(x) \quad \text{per} \quad x_0 \leq x \leq \xi.$$

Ma allora $\psi(x)$ dovrebbe assumere in ogni punto dell'intervallo (x_0, ξ) il valore y_0 . E questo è assurdo poichè, per ipotesi, $\psi(x)$ è decrescente (7).