BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

COSIMO SANGERMANO

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.2, p. 119–124.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_119_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari.

Nota di COSIMO SANGERMANO (a Parma).

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo nel caso che il determinante Jacobiano abbia caratteristica* 1.

1. Il VILLA ha recentemente studiato le trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo nel caso generale in cui la caratteristica del determinante Jacobiano sia 2 (1). Nel presente lavoro si esamina il caso più particolare in cui tale caratteristica sia 1.

(1) Si veda: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a Jacobiano nullo*, Questo « Bollettino », s. III, v. II, p. 95, 1947.

2. Retta stazionaria e piano stazionario. – Siano

$$
(2.1)\qquad \begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z + [2] \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z + [2] \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z + [2] \end{aligned}
$$

le equazioni di una trasformazione puntuale T tra due spazi $S_3(x, y, z)$ ed $S_3'(x', y', z')$ nell'intorno della coppia (O, O') di punti corrispondenti, avendo assunto O, O' come origini delle coordinate proiettive (non omogenee), essendo le a, b, c costanti e indicando con [2] i termini di 2° grado e di grado superiore.

Supponiamo che il determinante $|a_i\, b_i\, c_i|$ sia nullo e di caratteristica 1. Per fissar le idee, c_1, c_2, c_3 non siano tutte nulle, sicchè può porsi

$$
a_i = hc_i, \qquad b_i = kc_i \qquad\qquad (i = 1,\ 2,\ 3).
$$

Un generico E_1 (non appartenente al piano $c_1x + c_2y + c_3z = 0$) di centro O viene trasformato dalla T nell'E_1' della retta

$$
x' - hz' = y' - kz' = 0;
$$

tale retta (che si dirà *stazionaria*) può assumersi come retta $x' = y' = 0$, il che dà luogo alla determinazione

$$
(2.2)\qquad h = k = 0.
$$

Un generico piano per O' (non appartenente al fascio avente per asse la retta stazionaria) si trasforma, mediante la T, in una superficie avente per piano tangente in O il piano di equazione

$$
c_1x + c_2y + c_3z = 0;
$$

tale piano (che si dirà *stazionario*) può assumersi come piano $z = 0$, il che implica

$$
(2.3)\qquad c_1 = c_2 = 0.
$$

3. Piani principali e rette principali. – Con la scelta fatta fin qui dei riferimenti proiettivi dei due spazi, le equazioni di T (scrivendo anche i termini di secondo grado degli sviluppi in serie), posto $c_3 = c$, assumono la forma:

$$
\begin{aligned}
x' &= \phantom{cz +{}} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + [3] \\
y' &= \phantom{cz +{}} b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + 2b_{12}xy + 2b_{13}xz + 2b_{23}yz + [3] \\
z' &= cz + c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3].
\end{aligned}
$$

Ai piani $y' = mx'$ passanti per la retta stazionaria corrispondono in S_3 superficie che hanno in O punto doppio e il cui cono tangente è segato dal piano stazionario nella coppia di rette rappresentata dalle equazioni

$$(3.1)\qquad \begin{gathered} z = 0, \\ (b_{11} - ma_{11})x^2 + 2(b_{12} - ma_{12})xy + (b_{22} - ma_{22})y^2 = 0. \end{gathered}$$

I piani $y' = mx'$ per cui le rette (3.1) sono coincidenti (piani che si diranno *principali*) sono quelli per cui m è radice dell'equazione

$$(3.2)\qquad (b_{12} - ma_{12})^2 - (b_{11} - ma_{11})(b_{22} - ma_{22}) = 0;$$

questa, se non è una identità rispetto ad m ([2]), ammette in generale due radici distinte m_1, m_2, corrispondentemente alle quali si hanno i due piani principali

$$y' = m_1 x', \qquad y' = m_2 x'.$$

Assumendo questi piani come piani $y' = 0$. $x' = 0$ del riferimento proiettivo di S_3', si ha:

$$(3.3)\qquad m_1 = 0, \qquad \frac{1}{m_2} = 0.$$

Dovendo allora la (3.2) ammettere come radici le (3.3) si ha

$$(3.4)\qquad b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = 0, \qquad a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0,$$

e quindi

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \equiv \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x + a_{12}y)^2,$$

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 \equiv \frac{1}{b_{22}}(b_{22}y + b_{12}x)^2.$$

Le due rette

$$z = a_{11}x + a_{12}y = 0, \qquad z = b_{22}y + b_{12}x = 0$$

sono le generatrici di contatto col piano stazionario dei coni tangenti in O alle superficie corrispondenti ai piani principali (coni che si diranno *principali*).

Assumendo tali rette (che si diranno *rette principali*) rispettivamente come rette $z = x = 0$, $z = y = 0$, si ha

$$(3.5)\qquad a_{12} = b_{12} = 0.$$

4. **Cono cuspidale.** - Le rette $z = y - ux = 0$ del piano stazionario hanno per corrispondenti le curve cuspidate ($a_{11} = a$, $b_{22} = b$)

$$\begin{cases} x' = ax^2 + [3] \\ y' = bu^2x^2 + [3] \\ z' = (c_{11} + 2c_{12}u + c_{22}u^2)x^2 + [3], \end{cases}$$

([2]) In tal caso (che qui si esclude) tutti i piani per la retta stazionaria sarebbero piani principali.

le cui tangenti cuspidali

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{bu^2} = \frac{z'}{c_{11} + 2c_{12}u + c_{22}u^2}$$

sono, al variare di u, le generatrici di un cono (che si dirà *cono cuspidale*) avente per equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x' &= av \\ y' &= bu^2v \\ z' &= (c_{22}u^2 + 2c_{12}u + c_{11})v \end{aligned}$$ (3).

Il cono cuspidale è tangente ai piani principali lungo le rette

$$\begin{aligned} x' &= bz' - c_{22}y' \\ y' &= az' - c_{11}x'. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Assumendo le rette (4.1) come rette $x' = z' = 0$, $y' = z' = 0$, si ha

$$c_{22} = c_{11} = 0. \tag{4.2}$$

5. **Cono jacobiano.** - La superficie jacobiana della T ha in O punto doppio (generalmente conico), e il suo cono tangente (che si dirà *cono jacobiano*) ha l'equazione:

$$(ax + a_{13}z)(by + b_{23}z) - a_{23}b_{13}z^2 = 0.$$

Nella polarità che il cono jacobiano subordina fra i piani e le rette appartenenti alla stella di centro O, al piano stazionario corrisponde la retta

$$ax + a_{13}z = by + b_{23}z = 0. \tag{5.1}$$

Assumendola come retta $x = y = 0$, si ha

$$a_{13} = b_{23} = 0. \tag{5.2}$$

6. **Riferimento metrico intrinseco.** - Da quanto si è detto risulta che l'intorno del 2° ordine della trasformazione in (O, O') definisce intrinsecamente due terne di assi, che costituiscono, nella geometria metrica, un riferimento intrinseco.

(3) L'equazione cartesiana del cono cuspidale è

$$(abz' - ac_{22}y' - bc_{11}x')^2 = 4c_{12}ab\, x'y'.$$

In tale riferimento le equazioni di T possono scriversi

$$
(6.1)\qquad
\begin{aligned}
x' &= \phantom{cz + 2c_{12}xy +{}} ax^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + [3]\\
y' &= \phantom{cz + 2c_{12}xy +{}} by^2 + b_{33}z^2 + 2b_{13}xz + [3]\\
z' &= cz + 2c_{12}xy + c_{33}z^2 + 2c_{13}xz + 2c_{23}yz + [3];
\end{aligned}
$$

in esse tutti i coefficienti sono invarianti metrici.

7. **Alcune rette intrinsecamente caratterizzate.** - I due coni principali (n. 3), che, nei riferimenti introdotti, hanno le equazioni

$$
\begin{aligned}
ax^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz &= 0\\
by^2 + b_{33}z^2 + 2b_{13}xz &= 0,
\end{aligned}
$$

sono ulteriormente segati dai piani $x = 0$, $y = 0$, rispettivamente lungo le generatrici

$$
\begin{aligned}
x = a_{33}z + 2a_{23}y &= 0\\
y = b_{33}z + 2b_{13}x &= 0;
\end{aligned}
$$

assumendo queste due rette come rette $x = z - y = 0$, $y = z - x = 0$. si ha

$$
(7.1)\qquad 2a_{23} = -a_{33}, \qquad 2b_{13} = -b_{33}.
$$

Consideriamo ancora l'E_2 di flesso (ordinario) appartenente alla retta stazionaria $(x = y = 0)$. Ad esso corrisponde, nella T, l'elemento curvilineo

$$
\begin{aligned}
x' &= \phantom{cz +{}} a_{33}z^2 + [3]\\
y' &= \phantom{cz +{}} b_{33}z^2 + [3]\\
z' &= cz + c_{33}z^2 + [3],
\end{aligned}
$$

il quale ha per piano osculatore in O' il piano di equazione

$$
b_{33}x' - a_{33}y' = 0;
$$

assumendolo come piano $x' - y' = 0$, si ha, tenendo conto anche delle (7.1)

$$
(7.2)\qquad b_{33} = a_{33} = -2a_{23} = -2b_{12}.
$$

Assumeremo infine come retta $x' = y' = z'$ una delle due rette in cui il piano $x' - y' = 0$ sega il cono cuspidale; con tale scelta si ha

$$
4c_{12}^2 = ab.
$$

Esistono dunque ∞^8 riferimenti proiettivi, rispetto ai quali la trasformazione puntuale T può rappresentarsi, nell'intorno della coppia (O, O'), mediante le equazioni

$$
(7.3)\qquad
\begin{aligned}
x' &= \phantom{cz + \sqrt{abxy} +{}} ax^2 + dz(z - y) + [3]\\
y' &= \phantom{cz + \sqrt{abxy} +{}} by^2 + dz(z - x) + [3]\\
z' &= cz + \sqrt{abxy} + dz(lx + my + nz) + [3],
\end{aligned}
$$

in cui si è posto

$$a_{33} = d, \qquad 2c_{13} = dl, \qquad 2c_{23} = dm, \qquad c_{33} = dn.$$

8. **Alcuni invarianti proiettivi.** – Osservando che ormai è stato fissato intrinsécamente il riferimento proiettivo nella stella di centro O, appare che $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{d}$ sono invarianti proiettivi della trasformazione.

Infatti, i due coni principali sono segati rispettivamente dai piani $y=0$, $x=0$ nelle coppie di rette:

$$y = ax^2 + dz^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad x = by^2 + dz^2 = 0;$$

e i due rapporti sopra indicati sono i quadrati delle coordinate proiettive di tali rette nei due fasci di centro O appartenenti ai piani $y=0$, $x=0$.

Segue subito l'invarianza del rapporto $\frac{ab}{d^2}$, che si deduce anche dall'equazione del cono jacobiano $d^2z^2 - 4abxy = 0$.

Il significato geometrico di quest'ultimo invariante può ottenersi considerando il piano polare della retta $x=y=0$ rispetto al cono jacobiano, cioè il piano $2ab(x+y) - d^2z = 0$. e la retta r intersezione di tale piano col piano $y=0$, cioè la retta

$$y = 2abx - d^2z = 0.$$

Ebbene le rette r, $x=z$, $z=0$, $x=0$ formano nell'ordine scritto un birapporto che vale appunto $2ab/d^2$.