Bollettino
Unione Matematica Italiana

Carlo Felice Manara

Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.2, p. 114–119.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_114_0>

Per la caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli.

Nota di CARLO FELICE MANARA (a Milano).

Sunto. - *Si dànno due caratterizzazioni delle curve la cui equazione può scriversi* $\{p_{2m}\}^3 + \{q_{3m}\}^2 = 0$, *le quali, a meno di una eventuale componente doppia non diramante, dànno tutte le curve di diramazione dei piani tripli.*

1. La presente Nota si propone di caratterizzare una classe di curve algebriche notevoli, che hanno fornito argomento di studio, da varii punti di vista, a diversi Autori; quelle curve, la cui equazione può essere scritta nella forma

$$\Phi_{6m} = \{p_{2m}\}^3 + \{q_{3m}\}^2 = 0 \tag{1}$$

(essendo p_{2m} e q_{3m} due forme nelle variabili omogenee $x_1\, x_2\, x_3$ dei gradi $2m$ e $3m$ rispettivamente).

A noi interessa in modo particolare il loro studio per il fatto che non solo ogni curva del tipo (1) irriducibile è di diramazione per un piano triplo (come è del tutto evidente dal semplice esame della equazione (1)) ma anche ogni curva di diramazione di un piano triplo (o quadruplo) può, coll'aggiunta di una opportuna parte doppia non diramante, venir ricondotta ad essere una curva del tipo (1). Per quanto riguarda le curve di diramazione dei piani tripli, la proprietà (del resto ovvia) è stata esplicitamente rilevata ed ampiamente sfruttata dal POMPILJ [1] nei suoi studii sull'argomento, mentre per quanto riguarda le curve di diramazione dei piani quadrupli il fatto segue subito dall'osservazione che ogni curva di diramazione per un piano quadruplo lo è anche per il piano triplo suo risolvente cubico [2]. Le curve (1) sono di ordine $6m$ e, quando p_{2m} e q_{3m} sono generici, posseggono come sole singolarità $6m^2$ cuspidi distinte, il cui gruppo costituisce l'intersezione completa delle curve $p_{2m} = 0$ e $q_{3m} = 0$. Inoltre in ognuna di tali cuspidi la tangente cuspidale coincide con la tangente alla $q_{3m} = 0$.

Notevoli proprietà di queste curve, dal punto di vista della teoria dei sistemi continui di curve algebriche piane, sono state determinate da B. SEGRE [3], ed il loro gruppo di POINCARÉ è stato determinato con metodi topologici diretti dal TURPIN [4].

Noi caratterizzeremo qui anzitutto le curve del tipo (1) (che in tutta la presente trattazione chiameremo curve Φ) generiche, cioè possedenti come sole singolarità delle cuspidi distinte ed applicheremo poi i risultati ottenuti alle curve in cui coppie e terne di cuspidi confluiscono generando singolarità più complicate. E vi è speranza che i procedimenti qui usati possano essere in qualche modo estesi alle curve che posseggano singolarità ulteriori oppure si spezzino venendo a contenere parti doppie, il che porterebbe, se non a risolvere completamente, certo a far progredire di molto il problema della caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli e quadrupli.

La caratterizzazione delle curve Φ sarà qui data in due distinte forme: una (§ 2) di tipo geometrico funzionale, attraverso la serie cui appartengono le singolarità cuspidali delle curve stesse, ana-

(1) G. POMPILJ, *Sulla rappresentazione algebrica dei piani tripli*, « Rend. Sem. Matem. Univ. di Roma », serie 4ª, vol. 3 (1939).

(2) La circostanza era già stata rilevata dal B. SEGRE come un fatto « curioso » in una nota a piè di pagina della Sua Memoria: *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali*, (« Mem. Acc. d'Italia », vol. 1°, n. 4) ma sussiste evidentemente in generale per ogni piano quadruplo.

(3) B. SEGRE, *Esistenza e dimensione di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri*, « Rend. Lincei ». S. 6°, vol. X (1229).

(4) W. S. TURPIN, *On the fundamental group of a certain class of plane algebraic curves*, « Am. J. of Math. » 1937.

logamente a quanto è stato fatto recentemente per una classe di curve di diramazione dei piani tripli ([5]); una seconda (§ 3) di tipo proiettivo, attraverso l'appartenenza delle singolarità a curve di ordine minore, analogamente a quanto è stato fatto da B. SEGRE ([6]) per caratterizzare le curve di diramazione dei piani multipli generali.

2. La prima caratterizzazione, di tipo geometrico funzionale delle curve Φ, cui accennavamo è data dal seguente

TEOREMA I - Le curve $\Phi_{6m} = \{ p_{2m} \}^3 + \{ q_{3m} \}^2 = 0$ sono caratterizzate dal fatto che il gruppo delle loro cuspidi è equivalente a quello secato da una qualunque curva d'ordine m.

In altre parole, detto K il gruppo delle cuspidi, R un generico gruppo di punti allineati, si ha che la relazione

$$K \equiv mR \tag{2}$$

è caratteristica per le curve Φ.

Per dimostrarlo supponiamo di avere una curva irriducibile F possedente i caratteri plückeriani della Φ generica, cioè avente un ordine $n = 6m$ (con m intero) e come sole singolarità $6m^2$ cuspidi distinte; è anzitutto chiaro che se la F è una curva Φ cioè se l'equazione della F può porsi nella forma

$$F = \{ p_{2m} \}^3 + \{ q_{3m} \}^2 = 0$$

per essa vale la relazione (2). Infatti basta osservare che le cuspidi di F sono allora date da tutte e sole le intersezioni delle due curve $p_{2m} = 0$ e $q_{3m} = 0$ e che in ognuna di esse la $q_{3m} = 0$ è tangente alla relativa tangente cuspidale, mentre d'altra parte esistono delle curve aggiunte spezzate nella somma della $p_{2m} = 0$ e di una curva generica di ordine m. Inversamente supponiamo che per la F sussista la relazione (2); detto C un gruppo canonico di F, osserviamo che le curve aggiunte di ordine $(6m - 3) + 2m$ secano su F la serie completa dei gruppi equivalenti a $C + 2mR$; in base alla (2) vi sarà quindi anche una aggiunta ψ che seca il gruppo $2K + C$. Essa dovrà allora possedere dei nodi nelle cuspidi di F, cioè essere biaggiunta alla F stessa; ricordando che un gruppo C sta su una aggiunta di ordine $(6m - 3)$, potremo applicare alla ψ il teorema di NÖTHER detto dell'$Af + B\varphi$ e scrivere

$$\psi_{8m-3} = F_{6m} f_{2m-3} + \psi_{2m} \psi_{6m-3}$$

([5]) O. CHISINI e C. F. MANARA, *Sulla caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani tripli*, « Annali di Mat. », serie IV, tomo 25.

([6]) B. SEGRE, Memoria citata alla nota ([2]).

essendo ψ_{6m-3} e ψ_{2m} due aggiunte degli ordini $(6m-3)$ e $2m$ rispettivamente. Esiste dunque una aggiunta di ordine $2m$ e, come si verifica facilmente, è unica e non ha intersezioni con F fuori delle cuspidi; essa sarà chiamata da noi p_{2m}.

Di qui segue subito che le aggiunte di ordine $3m$ secano su F la serie completa dei gruppi equivalenti a mR; ancora per la (2) esisterà allora una aggiunta di ordine $3m$, che chiameremo q_{3m}, secante su F il gruppo K, cioè tangente in ogni cuspide di F alla relativa tangente cuspidale, senza avere con F stessa altre intersezioni fuori delle cuspidi. Ora la curva generica del fascio

$$\{p_{2m}\}^3 + \lambda\{q_{3m}\}^2 = 0 \tag{3}$$

possiede $6m^2$ cuspidi nelle intersezioni di $p_{2m}=0$ e $q_{3m}=0$, cioè nelle cuspidi stesse di F, con le medesime tangenti cuspidali e pertanto non ha intersezioni variabili con F stessa. Esiste quindi un valore di λ per cui essa coincide con F; dal che segue immediatamente il nostro assunto.

3. Una seconda caratterizzazione, di tipo proiettivo, delle curve Φ è data dal seguente

TEOREMA II - Le curve $\Phi_{6m}=\{p_{2m}\}^3+\{q_{3m}\}^2=0$ generiche sono caratterizzate dal fatto che le loro $6m^2$ cuspidi stanno su di una curva di ordine $2m$ ed una di ordine $3m$.

Sia ancora la curva F di ordine $6m$ possedente i caratteri plückeriani della Φ generica, ed ammettiamo che per le sue cuspidi passi una curva $p_{2m}=0$ di ordine $2m$ ed una generica ψ_{3m} non tangente ivi a nessuna delle tangenti cuspidali. Manifestamente la p_{2m} è unica e non ha altre intersezioni con F fuori delle cuspidi di F stessa. Inoltre, giacchè la p_{2m} e la ψ_{3m} non si incontrano altrove, il teorema di NÖTHER già invocato permette di scrivere ogni altra aggiunta ψ'_{3m} di ordine $3m$ nella forma

$$\psi'_{3m} = \psi_{3m} + p_{2m}f_m \tag{4}$$

dove $f_m=0$ è una curva di ordine m. Per dimostrare che la nostra F è una curva Φ basterà evidentemente dimostrare che esiste una aggiunta $q_{3m}=0$ di ordine $3m$ tangente in ognuna delle cuspidi di F alla relativa tangente cuspidale, giacchè, assodato questo fatto, l'assunto si dimostra con lo stesso procedimento del Teorema I. Osserviamo ora che, sempre per lo stesso teorema di NÖTHER, sussiste la relazione

$$F = \psi^{(1)}_{3m}\psi^{(2)}_{3m} + \{p_{2m}\}^2\alpha_{2m} \tag{5}$$

essendo $\psi^{(1)}_{3m}$ e $\psi^{(2)}_{3m}$ due aggiunte di ordine $3m$ ed α_{2m} una opportuna curva di ordine $2m$. Sulla (5) si legge che in ognuna delle cuspidi di F, punti comuni alla $p_{2m} = 0$ ed alle $\psi_{3m}^{(1)} = 0$, $\psi_{3m}^{(2)} = 0$, le tangenti a queste due ultime curve separano armonicamente le tangenti alla p_{2m} ed alla F. Quindi per dimostrare che esiste la q_{3m} tangente in ognuna delle cuspidi di F alla relativa tangente cuspidale, basta dimostrare che esiste una aggiunta di ordine $3m$ che in ognuna delle cuspidi di F ha una tangente coniugata armonica di quella di p_{2m} rispetto alla coppia di tangenti alle $\psi_{3m}^{(1)}$, $\psi_{3m}^{(2)}$. Ora dalla (4) segue immediatamente che può trovarsi un λ tale che sia

$$\psi_{3m}^{(1)} + \lambda\, \psi_{3m}^{(2)} = p_{2m}\, \beta_m \tag{6}$$

e di qui segue che la q_{3m} cercata da noi è data da

$$q_{3m} = \psi_{3m}^{(1)} - \lambda\, \psi_{3m}^{(2)} \tag{7}$$

in quanto è facile verificare che il birapporto delle tangenti a $\psi_{3m}^{(1)}$, $\psi_{3m}^{(2)}$, p_{2m}, q_{3m} in ognuno dei punti comuni a tutte e quattro le curve vale precisamente $-\lambda/\lambda = -1$ [7].

Che poi, inversamente, ogni volta che la F è una curva Φ le sue cuspidi stiano su una curva di ordine $2m$ ed una di ordine $3m$, è cosa che abbiamo già letto direttamente più volte sull'equazione delle curve Φ.

4. In tutto quanto precede abbiamo sempre esplicitamente supposto che le curve Φ di cui si è trattato fossero generiche.

Vogliamo ora esaminare se quanto abbiamo dimostrato possa sussistere anche lasciando cadere qualcuna delle ipotesi poste, cosicchè esse risultino non tutte necessarie ma semplicemente opportune per dare maggiore speditezza e semplicità alle dimostrazioni.

Rimandando ad altra occasione l'esame del caso in cui le curve di cui si tratta si spezzino, ricerchiamo qui se sia possibile lasciar cadere l'ipotesi che le loro cuspidi, pur mantenendosi nello stesso numero, non siano tutte distinte ma vengano a confluire dando singolarità limiti più complicate. Per le applicazioni che di quanto precede sto facendo allo studio delle curve di diramazione dei piani multipli, interessano due casi notevoli in cui ciò si verifica:

A) il caso in cui due cuspidi vengano a confluire in un punto O come avviene quando le due curve $p_{2m} = 0$ e $q_{3m} = 0$ sono ivi tra loro tangenti con un contatto bipunto. Si ha allora un

[7] I ragionamenti svolti in questo paragrafo si improntano a quelli usati dalla prof. G. Masotti Biggiogero in alcune sue recentissime ricerche sui piani tripli e quadrupli.

oscnodo della curva Φ ed in O hanno origine due rami lineari distinti di Φ stessa mutuamente osculantisi;

B) il caso in cui tre cuspidi vengano a confluire in un punto T, come avviene quando la curva $q_{3m}=0$ possiede ivi un nodo per cui passa pure la $p_{2m}=0$ toccando uno dei rami di $q_{3m}=0$. Si ha allora in T una singolarità costituita da una coppia di punti tripli infinitamente vicini ed ivi hanno origine tre rami lineari distinti di Φ, aventi per tangente comune quella alla $p_{2m}=0$ in T stesso.

Ovviamente ogni oscnodo ed ogni coppia di punti tripli infinitamente vicini possono ritenersi generati dal confluire di due o tre cuspidi rispettivamente e non offre nessuna difficoltà verificare che i teoremi stabiliti sopra sussistono ancora per questi casi particolari. Precisamente il Teorema I sussiste ancora purchè nella relazione fondamentale

$$K \equiv mR$$

si convenga di contare, tra le cuspidi, ognuno dei punti origini dei rami lineari mutuamente osculantesi in un oscnodo, oppure ognuno dei punti origini dei rami lineari mutuamente tangenti in una singolarità costituita da una coppia di punti tripli infinitamente vicini. Analogamente il Teorema II sussiste ancora purchè si convenga che in ogni oscnodo le curve p_{2m} e ψ_{3m} di cui si ammette l'esistenza abbiano un contatto bipunto ed in ogni coppia di punti tripli la p_{2m} passi toccando i tre rami e la ψ_{3m} abbia un nodo con uno dei rami tangente alla p_{2m}.