Bollettino Unione Matematica Italiana

Mario Manarini

Sulle equazioni della dinamica dei fluidi perfetti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **3** (1948), n.2, p. 111–114.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_111_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1948.

Sulle equazioni della dinamica dei fluidi perfetti (*).

Nota di MARIO MANARINI (a Bologna).

Sunto. - *Nell' ordine d' idee sviluppate in una recente Nota del sig.* PAILLOUX *si stabilisce, nello spazio-tempo euclideo e nello schema euleriano, un' equazione vettoriale universale della trasformazione per movimento di un fluido perfetto che, oltre sintetizzare tutto ciò che possono dare per tale trasformazione la Meccanica razionale e la Geometria in quanto l' equazione stessa compendia l' ordinaria equazione universale del movimento e l' equazione di continuità nello schema euleriano, ci permette di dedurre immediatamente il teorema di* EULERO *nella sua forma generale.*

1. In una recente Nota (¹) apparsa nei « Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris », il sig. H. PAILLOUX trasforma le equazioni cartesiane del movimento dei fluidi perfetti in modo da dar loro una forma poco dissimile dall' equazione di continuità nello schema euleriano; con ciò egli può dedurre una forma integrale generale per il teorema di EULERO. Colgo l' occasione per trattare tale questione ottenendo, con l' uso delle omografie vettoriali nello spazio-tempo euclideo, un' equazione che, oltre a sintetizzare tutto quanto ci può dare per lo studio della trasformazione di un fluido in movimento la Meccanica razionale e la Geometria, cioè la cosidetta equazione universale e l'equazione di continuità, ci permette di dedurre subito, in forma

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell' Università di Bologna.

(¹) H. PAILLOUX, *Sur les équations des mouvements des fluides parfaits*, « Comptes Rendus d. s. de l' Ac. d. Sc. de Paris », 1947, t. 225, pagg. 1122-1124.

generale, il teorema di EULERO relativo alla pressione che esercita sopra la superficie che limita una porzione del fluido, il fluido circostante.

Ricordiamo che l'equazione universale per il movimento di un fluido perfetto e l'equazione di continuità nello schema euleriano, cioè involgendo l'atto di moto euleriano $v(M, t)$, dove v è la velocità, al tempo t, della particella del fluido che in tale istante occupa il posto M, sono date rispettivamente dalle relazioni

$$\frac{dv}{dM} v + \frac{\partial v}{\partial t} = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad}_M p \tag{1}$$

$$\operatorname{div}_M \rho v + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

nelle quali ρ e p indicano la densità e la pressione ed F è il vettore della forza per unità di massa del fluido.

Considerando il campo vettoriale $v(M, t)$ ed il campo scalare $\rho(M. t)$ indipendentemente dal loro significato fisico, ma semplicemente quali date funzioni del punto M e del parametro t soddisfacenti ad opportune condizioni di continuità e di derivabilità, ha luogo l'identità vettoriale:

$$\operatorname{grad}_M H(\rho v, v) + \frac{\partial \rho v}{\partial t} = \left\{ \operatorname{div}_M (\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\} v + \rho \left\{ \frac{dv}{dM} v + \frac{\partial v}{\partial t} \right\}. \tag{3}$$

Questa si verifica subito tenendo presente la formula di analisi vettoriale che dà il gradiente di una diade.

Riferendoci ora ad un fluido perfetto in movimento, qualora $v(M, t)$ e $\rho(M, t)$ abbiano i significati fisici di cui sopra, tenendo presente le equazioni (1) e (2), la (3) si muta nell'equazione

$$\operatorname{grad}_M \{ \rho H(v, v) + p \} + \frac{\partial \rho v}{\partial t} = \rho F. \tag{4}$$

Cosicchè, quali equazioni della trasformazione di un fluido per movimento, si possono prendere, al posto delle (1) e (2) le (4) e (2); le quali presentano una particolare analogia formale fra di loro, che è più appariscente ancora se si passa alle equivalenti quattro equazioni scalari che si possono dedurre ricorrendo ad un riferimento cartesiano. Queste equazioni cartesiane costituiscono precisamente il sistema di equazioni (1) della citata Nota del sig. PAILLOUX.

Consideriamo ora lo spazio euclideo quadridimensionale E_4 nel quale le quattro coordinate cartesiane ortogonali di ogni punto P siano date dalle tre coordinate spaziali x, y, z dei punti M dello spazio euclideo ordinario E_3 e dal tempo t. Sia τ il versore dello spazio E_4, normale allo spazio E_3 di E_4; cosicchè nel riferimento cartesiano rispetto al sistema ortogonale (O, x, y, z, t) il vettore τ sarà il versore che determina l'asse Ot dei tempi, mentre i versori degli assi Ox, Oy, Oz, potranno essere indicati, come al solito, con i, j, k.

Per maggiore uniformità di notazione i quattro versori precedenti si potranno indicare con i_1, i_2, i_3, i_4 dove è $i_4 = \tau$ e le quattro coordinate cartesiane dei punti P si potranno indicare con x_1, x_2, x_3, x_4, dove è $x_4 = t$.

Se $P(M, t)$, ossia $P(x, y, z, t)$, è il punto dello spazio-tempo E_4 determinato dal punto M di E_3 dove si considera la generica particella del fluido in movimento e dal valore di t all'istante al quale ci riferiamo, all'equazione di continuità (2) si può dare, in E_4, la forma più compendiosa:

$$\operatorname{div}_P \rho(v + \tau) = 0, \tag{5}$$

esprimente che il vettore $\rho(v + \tau)$ è, in detto spazio-tempo, sempre un vettore solenoidale. Nello spazio E_3 è solenoidale il campo delle velocità v, nel caso dei fluidi incomprimibili.

Entrambe le equazioni (2) e (4), oppure le equazioni (2) e (5) si possono poi compendiare nell'unica equazione di schema euleriano in E_4:

$$\operatorname{grad}_P \rho H(v + \tau,\ v + \tau) = \rho F - \operatorname{grad}_M p, \tag{6}$$

nella quale H è il simbolo che indica una diade.

Ciò si può provare per via cartesiana o, volendo, per via vettoriale assoluta. Al secondo membro figura un vettore parallelo allo spazio E_3 di E_4.

Se poi introduciamo le notazioni

$$w = \sqrt{\rho}(v + \tau) \quad , \quad f = \rho F$$

l'equazione (6) prende la forma:

$$\operatorname{grad}_P H(w, w) = f - \operatorname{grad}_M p, \tag{6'}$$

che è del tutto analoga alla forma dell'equazione del moto dei fluidi incomprimibili in E_3.

Se ricorriamo alle accennate coordinate cartesiane x_1, x_2, x_3, x_4, in E_4 e poniamo w nella forma cartesiana

$$w = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 + u_4 i_4$$

con $u_1 = u\sqrt{\rho}$, $u_2 = v\sqrt{\rho}$, $u_3 = w\sqrt{\rho}$, $u_4 = \sqrt{\rho}$, nelle quali u, v, w, sono le componenti di v, traducendo cartesianamente la (6') si ottiene subito il sistema delle quattro equazioni stabilito nella Nota del Pailloux.

Moltiplichiamo ora la (4) per l'elemento di volume $d\Omega = dSdt = dxdydzdt$ dello spazio E_4 ed integriamo, estendendo l'integrazione ad un dominio (Ω) di E_4. Se (Σ) è la frontiera di (Ω) ed n_e è il versore che, nei punti di (Σ), determina la normale esterna a (Σ), le tre integrazioni quadruple al primo membro si possono sostituire con integrali tripli di frontiera, estesi a (Σ); e si ottiene:

$$\iiint_{(\Sigma)} \rho(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}_e)\boldsymbol{v}\, d\Sigma + \iiint_{(\Sigma)} p\boldsymbol{n}_e d\Sigma + \iiint_{(\Sigma)} \rho\boldsymbol{v}\, dS = \iiiint_{(\Omega)} \rho\boldsymbol{F}\, d\Omega. \tag{7}$$

I primi due integrali al primo membro conseguono dal teorema del gradiente. Per ottenere il terzo integrale si può, ovviamente, osservare che, ad esempio con procedimento vettoriale, si ha:

$$\iiiint_{(\Omega)} \frac{\partial \rho\boldsymbol{v}}{\partial t}\, d\Omega = \iiiint_{(\Omega)} \frac{d\rho\boldsymbol{v}}{dP}\tau\, d\Omega = \iiint_{(\Sigma)} H(\boldsymbol{n}_e,\ \rho\boldsymbol{v})\tau\, d\Sigma = \iiint_{(\Sigma)} \rho\boldsymbol{v}\, dS.$$

Per passare alle equazioni cartesiane equivalenti alla (7), che si riducono a tre perchè si tratta di vettori dello spazio E_3, basterà tener conto che le proiezioni di $\boldsymbol{n}_e d\Sigma$ sugli assi Ox, Oy, Oz, sono rispettivamente $dydzdt$, $dzdxdt$, $dxdydz$, mentre, come si è già tenuto conto, la sua proiezione sull'asse Ot è $dxdydz = dS$.

La (7) è, in forma integrale, un'espressione generale del teorema di EULERO relativo alle pressioni esercitate sulla superficie che limita una porzione di fluido, dal fluido circostante.