
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

CARMELO LONGO

Sugli elementi curvilinei piani E_3 con lo stesso E_1

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 3
(1948), n.2, p. 108–111.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1948_3_3_2_108_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Sugli elementi curvilinei piani E_3 con lo stesso E_1 .

Nota di CARMELO LONGO (a Roma).

Sunto. - Si studia l'insieme degli E_3 piani per uno stesso E_1 ottenuti combinando linearmente le equazioni di due degli E_3 .

Scopo della presente Nota è di chiarire per gli E_3 ⁽¹⁾, aventi lo stesso E_1 , ossia lo stesso centro e la stessa tangente, il concetto di fascio di due E_3 , ossia l'insieme ∞^1 di E_3 ottenuto combinando linearmente le equazioni di due degli E_3 .

Gli E_3 di un fascio si possono mettere in corrispondenza biunivoca con le cubiche di un fascio ovvero con i punti di una conica: per questo credo più opportuno chiamare il fascio di E_3 , un fascio razionale.

Dati due degli E_3 di un fascio do la costruzione di un qualsiasi altro E_3 del fascio.

In un lavoro in corso di pubblicazione mi sono occupato della questione analoga per le calotte σ_3 ⁽²⁾.

La questione si potrebbe facilmente generalizzare per gli E_k .

1. Consideriamo gli E_3 piani aventi uno stesso centro, e la stessa tangente:

scelto il punto $O(0, 0)$ come centro e la retta $y = 0$, come tangente, l'equazione di un E_3 , appartenente ad un piano α , è del tipo;

$$(1) \quad a_0 y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + [4]_\alpha$$

ove con $[4]_\alpha$ s'indicano termini d'ordine maggiore di 3.

⁽¹⁾ Per le nozioni riguardanti gli E_k si veda la Memoria di E. BOMPIANI: *Elementi differenziali regolari e non regolari sul piano e loro applicazioni alle curve algebriche piane*. « Rend. di Mat. dell' Univ. di Roma », vol. 5°, 1946.

⁽²⁾ C. LONGO: *Invarianti di calotte del 3° ordine*, « Rend. di Mat. dell' Univ. di Roma », 1948.

Poichè si studiano gli E_3 , nel piano proiettivo, rispetto alle collineazioni, possiamo assumere a_0, a_2, a_3 come coordinate omogenee. Si possono allora rappresentare gli E_3 con i punti di un piano β .

Rispetto alle collineazioni costituiscono, evidentemente, *totalità invarianti*:

- 1°) gli E_3 *cuspidali*, ossia quelli per cui è $a_0 = 0$;
- 2°) gli E_3 di *flesso*, ossia quelli per cui è $a_2 = 0$;
- 3°) l' E_3 di *flesso di specie superiore*, o *iperinflessionale*, di equazione: $a_0 y = [4]_x$.

Un' omografia di α che lasci fisso il centro O e la tangente $y = 0$ di equazioni

$$(2) \quad x = \lambda x' + \mu y', \quad y = ky', \quad z = \pi_1 x' + \pi_2 y' + \pi_3 z'$$

trasforma l'equazione (1) di un E_3 , nell' E_3' di equazioni:

$$(3) \quad a_0' y' = a_2' x'^2 + a_3' x'^3 + [4]_{x'}$$

per cui:

$$(4) \quad \begin{aligned} \rho a_0' &= k^2 \pi^2 a_0^2 \\ \rho a_2' &= k \lambda^2 \pi a_0 a_2 \\ \rho a_3' &= k \lambda^2 a_0 a_3 + 2 \pi^2 \mu a_2^2 - k \pi_1 \lambda^2 a_0 a_2. \end{aligned}$$

Le equazioni precedenti rappresentano una trasformazione quadratica T del piano β in un piano β' : le equazioni della inversa T' di T , si possono ottenere applicando all'equazione (3) dell' E_3' , l'omografia inversa della (2). Per le equazioni della T' si ha:

$$(4') \quad \begin{aligned} \sigma a_0 &= \lambda^4 a_0'^2 \\ \sigma a_2 &= k \lambda^2 \pi a_0' a_2' \\ \sigma a_3 &= k \lambda \pi^2 a_0' a_3' - 2 k \mu \pi^2 a_2'^2 + k \lambda \pi \pi_1 a_0' a_2'. \end{aligned}$$

L'omografia (2) trasforma quindi il piano β i cui punti rappresentano gli E_3 , in un piano β' inducendo una trasformazione quadratica i cui punti fondamentali appartengano rispettivamente agli E_2 caratteristici (E_2^* ed $E_2'^*$) rispettivamente di equazioni:

$$a_0 a_3 = -\frac{2\mu}{k} a_2^2 + \dots, \quad a_0' a_3' = \frac{2\mu}{\lambda} a_2'^2 + \dots$$

Si osservi che l' E_3 (invariante) iperinflesionale giustifica l'esistenza in β (e β') del punto base (il centro dell' $E_2'^*$).

Agli $\infty^1 E_3$

$$(5) \quad (\rho a_0 + \sigma b_0) y = (\rho a_2 + \sigma b_2) x^2 + (\rho a_3 + \sigma b_3) x^3 + [4]_x$$

che si ottengono combinando linearmente le equazioni di due E_3 , e che sono rappresentati in β dai punti della retta AB , se A e B sono rispettivamente i punti rappresentanti in β i due E_3 , corrispondono gli $\infty^1 E_3'$ che sono rappresentati in β' dai punti della

conica :

$$(6) \quad k\pi(a_2b_0 - a_0b_2)(\lambda\pi a_0'a_3' - 2\pi\mu a_2'^2 + \lambda\pi_1 a_0'a_2') = \\ = \lambda^2[k\pi(a_3b_0 - a_0b_3)a_2' + \lambda^2(a_2b_3 - a_3b_2)a_0']a_0'.$$

Questa conica si spezza nella retta $a_0' = 0$ ed in una retta per il centro dell' E_2^* solamente se: $a_2b_0 - a_0b_2 = 0$, ossia se gli $\infty^1 E_3$ del sistema (5) hanno lo stesso E_2 e quindi la retta AB che li rappresenta passa per il centro dell' E_2^* .

Si osservi che la conica (6) è individuata dalla retta AB e non dai due punti A e B : ossia se si prendono altri due E_3 del sistema (5) questi individuano la stessa retta e quindi la stessa conica (6). In particolare per individuare questa conica e quindi il sistema (5) si possono scegliere gli E_3 corrispondenti ai punti d'intersezione della retta con le rette invarianti $a_0 = 0$ e $a_2 = 0$, ossia l' E_3 di flesso e l' E_3 cuspidale del sistema (5).

2. Per un E_3 vi sono ∞^5 cubiche C^3 . Scelto un punto P (non appartenente alla tangente dell' E_3) ed una retta per esso, vi è una sola C^3 passante per l' E_3 ed avente in P una cuspidale con tangente cuspidale la retta fissata.

Poichè dato l' E_3 : $a_0y = a_2x^2 + a_3x^3 + [4]_x$ è fissato solamente il centro $O(0, 0)$ e la tangente $y = 0$, possiamo scegliere P come punto $(0, 1, 0)$ e la retta come retta $z = 0$.

Con tale scelta l'equazione della C^3 diviene:

$$a_0y = a_2x^2 + a_3x^3.$$

Due E_3 corrispondenti ai valori (a_0, a_2, a_3) e (b_0, b_2, b_3) individuano il fascio Λ di C^3 :

$$(7) \quad (\rho a_0 + \sigma b_0)y = (\rho a_2 + \sigma b_2)x^2 + (\rho a_3 + \sigma b_3)x^3.$$

Gli $\infty^1 E_3$ delle C^3 di questo fascio sono in corrispondenza biunivoca con gli $\infty^1 E_3$ del sistema (5).

Un'omografia (2) trasforma il fascio Λ in un fascio Λ' e le curve di questo fascio Λ' sono in corrispondenza biunivoca con gli $\infty^1 E_3$: $a_0'y' = a_2'x'^2 + a_3'x'^3 + [4]_{x'}$ corrispondenti ai punti della conica (6).

Per questo si potrà dire che il sistema (5) rappresenta un fascio razionale di E_3 .

Quindi: Considerati gli $\infty^2 E_3$ aventi uno stesso centro e la stessa tangente, gli $\infty^1 E_3$ che si ottengono combinando linearmente le equazioni di due E_3 (fascio di E_3), hanno come immagine una retta nel piano β i cui punti rappresentano gli $\infty^2 E_3$. Una collineazione che trasformi gli E_3 in un sistema analogo di E_3' , induce tra il piano β ed il piano β' , che rappresenta gli E_3' trasformati, una trasformazione quadratica: alle ∞^2 rette che rappresentano i fasci di E_3 in β , corrispondono le ∞^2 coniche (fondamentali) in β' , e viceversa. Agli

$\infty^2 E_3$ si possono associare ∞^2 cubiche: ad un fascio di E_3 , corrisponde un fascio (lineare) di cubiche.

3.. Posto $a_0 = b_0$ e $\frac{\sigma}{\rho} = k$, l'equazione del fascio (7) diviene:

$$(7') \quad (1+k)y = (a_2 + kb_2)x^2 + (a_3 + kb_3)x^3.$$

Siano P_1 e P_2 le intersezioni di una retta per $P(0, 1, 0)$ rispettivamente con le C^3 corrispondenti ai valori $k=0$ e $k=\infty$. Si può allora individuare la C^3 del fascio (7') relativa al valore k prendendo la C^3 passante per il punto P_3 tale che

$$(P_1P_2P_3P) = -k.$$

Individuata così una C^3 del fascio (7') è individuato un E_3 del sistema (5).